

1) $\cdot a_k = 22$, 显然 $a_k = 2$, 解得 $k = 6$.
故选 C.

二级结论 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 有 $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$; $S_{2n} = n(a_n + a_{n+1})$.

5. A 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 若 $\{a_n\}$ 为递增数列, 则 $d > 0$, 则一定存在 $t \in \mathbf{N}_+$ 使得 $a_t > 0$, 则 $a_{t+1} > a_t > 0$, $a_{2t+1} > a_t > 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), 所以 $a_i + a_{i+1} > 0$,

$$\text{所以 } S_{2t} = \frac{2t(a_1 + a_{2t})}{2} = \frac{2t(a_t + a_{t+1})}{2} > 0,$$

令 $m = 2t \in \mathbf{N}_+$, 则当 $n > m$ 时, 有 $S_n = S_{2t} + a_{2t+1} + a_{2t+2} + \dots + a_n > 0$, 故充分性成立;

反之, 若存在 $m \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > m$ 时, 都有 $S_n > 0$, 该条件不能推出 $\{a_n\}$ 为递增数列.

例如, 取 $a_n = 1$, 则 $d = 0$, $\{a_n\}$ 不是递增数列, 但 $S_n = n$, 取 $m = 1$, 当 $n > 1$ 时 $S_n > 0$ 恒成立, 故必要性不成立.

所以“ $\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在 $m \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > m$ 时, 都有 $S_n > 0$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

6. ACD 【解析】选项 A: 由题意易知,

$$P_1\left(\frac{1}{2}a_1, \frac{\sqrt{3}}{2}a_1\right), \text{ 则 } \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 = \sqrt{\frac{1}{2}a_1}, \text{ 即}$$

$$3a_1^2 - 2a_1 = 0, \text{ 又 } a_1 \neq 0, \text{ 解得 } a_1 = \frac{2}{3}, \text{ 故}$$

A 正确.

$$\text{选项 B: 易知 } P_{n+1}\left(a_1 + a_2 + \dots + a_n + \frac{1}{2}a_{n+1}, \frac{\sqrt{3}}{2}a_{n+1}\right), \text{ 即 } P_{n+1}\left(S_n + \frac{1}{2}a_{n+1}, \frac{\sqrt{3}}{2}a_{n+1}\right),$$

$$\text{则 } \frac{\sqrt{3}}{2}a_{n+1} = \sqrt{S_n + \frac{1}{2}a_{n+1}}, \text{ 即 } S_n = \frac{3}{4}a_{n+1}^2 - \frac{1}{2}a_{n+1}, \text{ 则 } S_{n-1} = \frac{3}{4}a_n^2 - \frac{1}{2}a_n, n \geq 2,$$

$$\text{所以 } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3}{4}a_{n+1}^2 - \frac{1}{2}a_{n+1} - \left(\frac{3}{4}a_n^2 - \frac{1}{2}a_n\right) = \frac{3}{4}a_{n+1}^2 - \frac{3}{4}a_n^2 - \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) = \frac{3}{4}(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n),$$

$$\text{又 } a_{n+1} + a_n \neq 0, \text{ 所以 } a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3}, n \geq 2,$$

$$\text{又 } a_1 = S_1 = \frac{3}{4}a_2^2 - \frac{1}{2}a_2, \text{ 且 } a_2 > 0, \text{ 解得}$$

$$a_2 = \frac{4}{3}, \text{ 所以 } a_2 - a_1 = \frac{2}{3}, \text{ 所以数列}$$

$$\{a_n\} \text{ 是以 } a_1 = \frac{2}{3} \text{ 为首项, } \frac{2}{3} \text{ 为公差的}$$

$$\text{等差数列, 所以 } a_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(n-1) =$$

$$\frac{2}{3}n, \text{ 所以 } a_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1) \neq 2a_n, \text{ 故 B}$$

错误.

$$\text{选项 C: } S_n = \frac{n\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}n\right)}{2} = \frac{n(n+1)}{3},$$

$$\text{则 } \frac{1}{S_n} = \frac{3}{n(n+1)} = 3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

$$\text{所以数列 } \left\{\frac{1}{S_n}\right\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } 3 \times$$

$$\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = 3\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3n}{n+1}, \text{ 故 C}$$

正确.

$$\text{选项 D: } S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{3}{4}a_{n+1}^2 - \frac{1}{2}a_{n+1} +$$

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_{n+1}^2 + \frac{1}{2}a_{n+1}, \text{ 故 D 正确. 故}$$

选 ACD.

7. 思路导引 (1) 利用等差数列通项公式与前 n 项和公式建立方程组, 求出首项与公差, 进而得到通项公式;

(2) 按奇偶分类写出 $\{b_n\}$ 的具体表达式, 再对 n 为偶数和奇数的情况分别求和, 得到分段形式的 T_n ;

(3) 计算 $T_n - S_n$ 的分段表达式, 转化为关于 n 的表达式的最小值问题, 由此求解即可.

【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{由题意得 } \begin{cases} (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 35, \\ 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = 24, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 3. \end{cases}$$

$$\text{所以 } a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2.$$

$$\text{所以 } S_n = \frac{n(1 + 3n - 2)}{2} = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

$$\text{所以 } T_n = \begin{cases} \frac{n^2}{2}, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{n^2 + 1}{2}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

$$\text{所以 } T_n - S_n = \begin{cases} \frac{n^2}{2} - \frac{n(3n - 1)}{2} = -n, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{n^2 + 1}{2} - \frac{n(3n - 1)}{2} = -n + \frac{1}{2}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

$$\text{所以 } T_n - S_n = -n \text{ 或 } -n + \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } T_n - S_n \text{ 的最小值为 } -n, \text{ 当 } n = 1 \text{ 时, } T_n - S_n \text{ 取得最小值 } -1.$$

$$\text{所以 } \lambda < -1.$$

$$\text{所以 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\text{所以 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\text{所以 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\therefore d > 0, \therefore a_1 = 3, d = 2,$$

$$\therefore a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } b_n = \begin{cases} 2n, & n \text{ 为奇数}, \\ 6n + 3, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } T_n = (b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{n-1}) + (b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_n) = [2 + 6 + 10 + \dots + (2n-2)] + [15 + 27 + \dots + (6n +$$

$$3)] = \frac{\frac{n}{2}(2+2n-2)}{2} + \frac{\frac{n}{2}(15+6n+3)}{2} =$$

$$\frac{4n^2 + 9n}{2},$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } n+1 \text{ 为偶数,}$$

$$T_n = T_{n+1} - b_{n+1} = \frac{4(n+1)^2 + 9(n+1)}{2} -$$

$$[6(n+1) + 3] = \frac{4n^2 + 5n - 5}{2},$$

$$\therefore T_n = \begin{cases} \frac{4n^2 + 5n - 5}{2}, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{4n^2 + 9n}{2}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

$$(3) \text{ 当 } n \text{ 为偶数时, 由 } T_n - S_n =$$

$$\frac{4n^2 + 9n}{2} - \frac{n(3+2n+1)}{2} = n^2 + \frac{5}{2}n > \lambda n \text{ 得,}$$

$$\lambda < n + \frac{5}{2},$$

$$\text{当 } n = 2 \text{ 时, } n + \frac{5}{2} \text{ 有最小值 } \frac{9}{2},$$

$$\therefore \lambda < \frac{9}{2}.$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } T_n - S_n = \frac{4n^2 + 5n - 5}{2} -$$

$$\frac{n(3+2n+1)}{2} = n^2 + \frac{1}{2}n - \frac{5}{2} > \lambda n, \therefore \lambda <$$

$$n - \frac{5}{2n} + \frac{1}{2},$$

$$\therefore y = n \text{ 单调递增, } \therefore y = \frac{1}{n} \text{ 单调递减,}$$

$$\therefore y = \frac{5}{2n} \text{ 单调递减, } \therefore y = -\frac{5}{2n} \text{ 单调}$$

$$\text{递增,}$$

$$\therefore y = n - \frac{5}{2n} + \frac{1}{2} \text{ 单调递增,}$$

$$\therefore \text{当 } n = 1 \text{ 时, } y = n - \frac{5}{2n} + \frac{1}{2} \text{ 有最小值}$$

$$1 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -1, \therefore \lambda < -1.$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

5.3 等比数列

5.3.1 等比数列

刷基础

1. B 【解析】由等比数列的定义可知, 等比数列是根据比值来定义的, 故等比数列的每一项和公比都不能为零, 故①②错误; 一个非零的常数列, 一定是等比数列, 其公比为 1, 故③正确; 由于 $\frac{4^2}{2^2} \neq$

$$\frac{6^2}{4^2}, \text{ 故不成等比数列, 故④错误.}$$

$$\text{故不成等比数列, 故④错误.}$$

$$\text{故不成等比数列, 故④错误.}$$

$$\text{故不成等比数列, 故④错误.}$$

2. A 【解析】因为 $\{a_n\}$ 为等比数列且通项公式为 $a_n = -2 \times 3^n$, 所以公比 $q =$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{-2 \times 3^n}{-2 \times 3^{n-1}} = 3, \text{ 故选 A.}$$

3. AB 【解析】设等比数列的公比为 q ,

$$\therefore \{a_n\} \text{ 是等比数列, } \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

$$\therefore \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |q|, \therefore \text{数列 } \{|a_n|\}$$

$$\text{是等比数列, 故 A 正确;}$$

$$\therefore \{a_n\} \text{ 是等比数列, } \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} =$$

$$q, \therefore \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q, \therefore \text{数列 } \{a_n\} \text{ 是等比数列, 故 B 正确;}$$

$$\text{不妨令 } a_n = 2^{n-1}, \text{ 则 } \lg a_1^2 = 0, \lg a_2^2 = \lg 4, \lg a_3^2 = \lg 16, \text{ 此时数列 } \{\lg a_n^2\} \text{ 不是等比数列, 故 C 错误;}$$

$$\therefore 2^{n+1} - 2^n = 2^{n+1} - 2^{n+1} \text{ 不一定为一个常数, 故数列 } \{2^{a_n}\} \text{ 不一定是等差数列, 故 D 错误. 故选 AB.}$$

$$q, \therefore \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q, \therefore \text{数列 } \{a_n \cdot a_{n+1}\}$$

$$\text{是等比数列, 故 B 正确;}$$

$$\text{不妨令 } a_n = 2^{n-1}, \text{ 则 } \lg a_1^2 = 0, \lg a_2^2 = \lg 4, \lg a_3^2 = \lg 16, \text{ 此时数列 } \{\lg a_n^2\} \text{ 不是等比数列, 故 C 错误;}$$

$$\therefore 2^{n+1} - 2^n = 2^{n+1} - 2^{n+1} \text{ 不一定为一个常数, 故数列 } \{2^{a_n}\} \text{ 不一定是等差数列, 故 D 错误. 故选 AB.}$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$N_+, a_n \neq 0 \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等比数列;

(2) 等比中项法: $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} (n \geq 2, n \in N_+, a_n \neq 0) \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等比数列;

(3) 通项公式法: $a_n = k \cdot q^{n-1} (k \neq 0, q \neq 0, n \in N_+) \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是首项为 k , 公比为 q 的等比数列.

4. (1) 【证明】因为 $a_{n+1} = 2a_n + 1$, 所以 $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$, 又 $a_1 + 1 = 2 \neq 0$, 则 $a_n + 1 \neq 0$,

则 $\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1} = 2$, 所以数列 $\{a_n + 1\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列.

(2) 【解】由 (1) 得 $a_n + 1 = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$, 所以 $a_n = 2^n - 1$.

5. C 【解析】设 $\{b_n\}$ 的公比为 q . 由 $b_3 - b_2 = 12$, 得 $2q^2 - 2q = 12$, 解得 $q = 3$ 或 $q = -2$. 又公比大于 0, 所以 $q = 3$, 所以 $b_n = 2 \times 3^{n-1}$. 故选 C.

6. B 【解析】因为 $a_3 - a_1 = 3, a_6 - a_4 = 81$, 所以 $a_6 - a_4 = a_3 \cdot q^3 - a_1 \cdot q^3 = q^3(a_3 - a_1) = 3q^3 = 81$, 解得 $q = 3$. 故选 B.

链接教材 本题是教材第 33 页例 5 的同类试题, 都是根据等比数列中项的关系求 a_1, q, a_n 等.

在等比数列的通项公式 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ 中, 有 a_1, q, n, a_n 四个基本量, 知其中的三个便可解出最后一个. 另外, a_1, q 是等比数列的基本量, 只要求出这两个基本量, 就能求出其他的量. 因此, 在求等比数列的通项公式时, 常将已知条件转化为关于基本量 a_1, q 的方程(组), 然后解方程(组)求得基本量 a_1, q , 进而可求得等比数列的通项公式, 这是解决有关等比数列问题的基本方法.

当然, 也要观察所给项之间的关系, 可以整体代入的话则往所给条件中的一个进行转化, 本题中 a_6 与 a_3, a_4 与 a_1 , 刚好都是 q^3 的倍数.

7. AC 【解析】对于 A, $\frac{a_8}{a_4} = q^4 = \frac{48}{3} = 16$, 则 $q = \pm 2$, 故 A 正确;

对于 B, $a_6 = a_4 \cdot q^2 = 3 \times 4 = 12$, 故 B 错误;

对于 C, 由 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ 得 $\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = q^2 = 4$, 所以数列 $\{a_n^2\}$ 是公比为 4 的等比数列, 故 C 正确;

对于 D, 当 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_n a_{n+1}}{a_{n-1} a_n} = q^2 = 4$, 所以数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ 是公比为 4 的等比数列, 故 D 错误. 故选 AC.

8. 【解】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$, 由题意得 $a_9^2 = a_2 a_{16} = 16$, 所以 $a_9 = a_1 q^8 = 4$ (负值舍去).

$$\times \frac{a_6 + a_7}{a_3 + a_4} = \frac{(a_3 + a_4) q^3}{a_3 + a_4} = q^3 = \frac{1}{8},$$

所以 $q = \frac{1}{2}$, 所以 $a_1 = 1024$, 所以 $a_n =$

$$a_1 q^{n-1} = 1024 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{11-n}.$$

(2) 由 (1) 知 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n =$

$$2^{10+9+8+\cdots+(11-n)} = 2^{\frac{(21-n)n}{2}}.$$

$$\text{二次函数 } y = \frac{(21-n)x}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{21}{2}x \text{ 的}$$

图象的对称轴为直线 $x = \frac{21}{2} = 10.5$, 所以

当 $n = 10$ 或 11 时, T_n 取得最大值, 且最大值为 2^{55} .

故 T_n 的最大值为 2^{55} , 此时 n 的值为 10 或 11.

9. C 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 当 $a_1 > a_2 > a_3$ 时, 有 $a_1 > a_1 q > a_1 q^2$.

若 $a_1 > 0$, 则 $1 > q > q^2$, 即 $0 < q < 1$, 此时数列 $\{a_n\}$ 是递减数列;

若 $a_1 < 0$, 则 $1 < q < q^2$, 即 $q > 1$, 此时数列 $\{a_n\}$ 也是递减数列.

当数列 $\{a_n\}$ 是递减数列时, 显然 $a_1 > a_2 > a_3$.

故“ $a_1 > a_2 > a_3$ ”是“等比数列 $\{a_n\}$ 递减”的充要条件. 故选 C.

归纳总结 对于等比数列 $\{a_n\}$,

(1) 当 $\begin{cases} a_1 > 0, \\ q > 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 < 0, \\ 0 < q < 1 \end{cases}$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列;

(2) 当 $\begin{cases} a_1 > 0, \\ 0 < q < 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 < 0, \\ q > 1 \end{cases}$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 为递减数列;

(3) 当 $q = 1$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 为常数列 (各项均不为 0);

(4) 当 $q < 0$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 为摆动数列, 它的所有奇数项同号, 所有偶数项同号, 但奇数项与偶数项异号.

10. D 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $a_1 a_2 = 1$, 可得 $q = \frac{1}{a_1}$.

对于 A, 若 $a_1 > 1$, 则公比 $q = \frac{1}{a_1} \in (0,$

$1)$, $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是递减数列, 故 A 错误.

对于 B, 若 $0 < a_1 < 1$, 则公比 $q = \frac{1}{a_1} \in$

$(1, +\infty)$, $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 故 B 错误.

对于 C, 若 $-1 < a_1 < 0$, 则公比 $q = \frac{1}{a_1} \in$

$(1, +\infty)$, $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是递减数列, 故 C 错误.

对于 D, 若 $a_1 < -1$, 则公比 $q = \frac{1}{a_1} \in$

$(0, 1)$, $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 故 D 正确. 故选 D.

11. B 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 若 $a_1, a_2, a_3 + 1$ 成等比数列, 则 $a_2^2 = a_1(a_3 + 1)$, 即 $(1+d)^2 = 1+2d+1$, 解得 $d = \pm 1$.

当 $d = -1$ 时, $a_2 = 1 - 1 = 0$, 此时 $a_1, a_2,$

敲黑板: 等比数列中的项不为 0

$a_3 + 1$ 不能构成等比数列, 故舍去.

经检验, 当 $d = 1$ 时, 符合题意, 所以 $a_4 = 1 + 3 = 4$, 故选 B.

12. D 【解析】若 $b = 0, a = 0, c = 0$, 则 $b = \sqrt{ac}$, 但 a, b, c 不是等比数列, 充分性不成立; 若 a, b, c 是等比数列, 则 $b^2 = ac$, 则

$b = \pm \sqrt{ac}$, 必要性不成立,

所以“ $b = \sqrt{ac}$ ”是“ a, b, c 是等比数列”的既不充分也不必要条件. 故选 D.

13. BC 【解析】由等比中项的定义可知, $M^2 = a_3 \cdot a_{11} = a_7^2$, 由等差中项的

定义可知, $2N = a_5 + a_9$, 即 $N = \frac{a_5 + a_9}{2} =$

$$\frac{\frac{a_7}{q^2} + a_7 q^2}{2}, \text{ 又 } 2a_7 = \frac{a_7 + a_7 q^2}{2} \text{ 不恒成立,}$$

故 A 错误, B 正确; 若 M 是负数, 则 $M < N$, 若 M 是正数, 则 $M = \sqrt{a_3 a_{11}} =$

$$\sqrt{a_5 a_9}, N = \frac{a_5 + a_9}{2}, \text{ 因为数列 } \{a_n\} \text{ 是公}$$

敲黑板: 等比数列下标和性质的应用

比 $q \neq 1$ 的正项等比数列, 所以 $a_5 \neq a_9$, 根据均值不等式可知 $M < N$, 综上所述可知 $M < N$, 故 C 正确, D 错误. 故选 BC.

14. ± 4 【解析】因为 a_1, a_7 是方程 $x^2 - 10x + 16 = 0$ 的两个不相等的实数根, 所以由根与系数的关系得 $a_1 a_7 = 16$. 因为 a_4 是 a_1, a_7 的等比中项, 所以 $a_4^2 = a_1 a_7 = 16$, 所以 $a_4 = \pm 4$.

15. C 【解析】在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 因为 $a_2 a_7 = 6a_4$, 所以 $a_2 a_7 = 6a_4 a_5$, 又因为 $a_4 \neq 0$, 所以 $a_5 = 6$. 故选 C.

16. B 【解析】在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 a_3 + 2a_2 a_6 + a_5 a_7 = 12$, 则 $a_2^2 + 2a_2 a_6 + a_6^2 = (a_2 + a_6)^2 = 12$, 则 $a_2 + a_6 = \pm 2\sqrt{3}$. 故选 B.

17. B 【解析】数列 $\{a_n\}$ 为正项等比数列, 由等比数列的性质得

$$a_1 a_{11} = a_2 a_{10} = a_3 a_9 = a_4 a_8 = a_5 a_7 = a_6^2, \text{ 因为 } a_5 a_7 = 9, \text{ 所以 } a_6^2 = 9, \text{ 又 } a_n > 0, \text{ 所以 } a_6 = 3.$$

$$\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_{11} = \log_3 (a_1 a_2 \cdots a_{11})$$

点悟: 通过对数运算性质将和转化为积, 向已知条件靠拢

$$= \log_3 [(a_1 a_{11})(a_2 a_{10})(a_3 a_9)(a_4 a_8) \cdot (a_5 a_7) \cdot a_6]$$

$$= \log_3 (9^5 \times 3) = \log_3 (3^{10} \times 3^1) = \log_3 3^{11} = 11. \text{ 故选 B.}$$

18. B 【解析】已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 因此乘积 T_n 也为正数, 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 0$, 若 $T_6 = T_8$, 则 $a_7 a_8 = 1$,

由等比数列的性质知 $a_1 a_{14} = a_2 a_{13} = \cdots = a_7 a_8 = 1$, 所以 $T_{14} = 1$, 故选项 A 错误;

又 $a_7 a_8 = a_1 \cdot q^6 \cdot a_1 \cdot q^7 = a_1^2 \cdot q^{13} = 1$, 因为 $a_1 > 1$, 所以 $0 < q < 1$, 所以 $a_7 > 1 > a_8$, 则 $a_1 > a_2 > \cdots > a_6 > a_7 > 1 > a_8 > \cdots$, 故 $\{T_n\}$ 先增后减, 所以 $T_n \leq T_7$, 故选项 B 正确;

若 $T_6 < T_7$, 则 $\frac{T_7}{T_6} = a_7 = a_1 \cdot q^6 > 1$, 又

$a_1 > 1$, 无法判断 q 与 1 的大小关系, 即无法判断 a_8 与 1 的大小关系, 故 T_7 与 T_8 的大小关系无法判断, 故选项 C, D 错误.

19. 27 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 $a_5 a_6 a_7 = a_6^3 = -27$, 所以 $a_6 =$

-3 , 所以 $a_2 = \frac{a_6}{q^4} < 0$, 所以 $a_2 a_6 + a_2 a_{10} + a_6 a_{10} = a_2 a_6 + a_6^2 + \frac{a_6^3}{a_2} = -3a_2 + 9 - \frac{27}{a_2} \geq 2\sqrt{(-3a_2) \cdot \left(-\frac{27}{a_2}\right)} + 9 = 27$,
当且仅当 $-3a_2 = \frac{27}{a_2}$, 即 $a_2 = -3$ 时取等号.

避坑: 运用均值不等式时, 注意检验等号能否取到

多种解法 因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 $a_5 a_6 a_7 = a_6^3 = -27$, 所以 $a_6 = -3$, 所以 $a_2 a_6 + a_2 a_{10} + a_6 a_{10} = a_4^2 + a_6^2 + a_8^2 \geq 2a_4 a_8 + 9 = 2a_6^2 + 9 = 2 \times 9 + 9 = 27$,
当且仅当 $a_4 = a_8 = -3$ 时取等号.

归纳总结 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $m+t=p+k$, 则 $a_m a_t = a_p a_k$ ($m, t, p, k \in \mathbf{N}_+$). 当条件或结论中涉及等差或等比数列中的两项或多项的关系时, 先观察分析下标之间的关系, 再考虑能否应用性质解决, 要特别注意等差、等比数列性质的区别.

20. D 【解析】原递推式可变形为 $a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$, 又 $a_1 - 1 = 1 \neq 0$, 则 $\{a_n - 1\}$ 是以 1 为首项, 3 为公比的等比数列,
所以 $a_n - 1 = 3^{n-1}$, 所以 $a_n = 3^{n-1} + 1$. 故选 D.

规律方法 当已知数列不是等比数列时, 往往需要利用待定系数法构造与之相关的等比数列. 利用等比数列的通项公式, 求出包含 a_n 的关系式, 进而求出 a_n .

对于 $a_{n+1} = ca_n + d$ ($c \neq 1, cd \neq 0$) 型递推公式, 可转化为 $a_{n+1} - \frac{d}{1-c} = c \cdot \left(a_n - \frac{d}{1-c}\right)$, 当 $a_1 - \frac{d}{1-c} \neq 0$ 时, 数列 $\left\{a_n - \frac{d}{1-c}\right\}$ 为等比数列, 或者消去常数项: 由 $a_{n+1} = ca_n + d$, $a_n = ca_{n-1} + d$ ($n \geq 2$), 两式相减得 $a_{n+1} - a_n = c(a_n - a_{n-1})$ ($n \geq 2$), 当 $a_2 - a_1 \neq 0$ 时, 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是公比为 c 的等比数列, 从而把一个非等比数列问题转化为等比数列问题.

21. $a_n = 2^n + (-1)^n$ 【解析】由 $a_{n+1} + a_n = 3 \times 2^n$, 得 $a_{n+1} - 2^{n+1} = -(a_n - 2^n)$, 又 $a_1 - 2 = -1$, 则 $a_n - 2^n \neq 0$, 则 $\{a_n - 2^n\}$ 是首项为 -1 , 公比为 -1 的等比数列, 故 $a_n - 2^n = (-1)^n$, 所以 $a_n = 2^n + (-1)^n$.

刷提升

1. A 【解析】因为 a, b, c 成等比数列, 且公比为 $\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$,
所以 $\frac{1}{b} \div \frac{1}{a} = \frac{a}{b} = 2$, 所以 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 的公比为 2, 故选 A.

2. A 【解析】因为 $\{a_n\}$ 为等比数列, 所以 $a_2 a_4 = a_3^2 = 2a_3$, 解得 $a_3 = 2$ 或 $a_3 = 0$,

又 $a_n \neq 0$, 所以 $a_3 = 2$,
则 $a_1 = 7 - 3a_3 = 1$.

设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q^2 = \frac{a_3}{a_1} = 2$,

所以 $a_5 = a_3 q^2 = 2 \times 2 = 4$.

3. D 【解析】由题意, 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $a_3 = 1$, $\begin{vmatrix} a_6 & 4 \\ 4 & a_8 \end{vmatrix} = 0$, 所以 $a_6 \cdot a_8 - 4 \times 4 = 0$, 所以 $a_6 \cdot a_8 = 16$, 则 $a_7 = \pm 4$.

由等比数列的性质知, a_7 与 a_3 的符号一致, 故 $a_7 = 4$. 故选 D.

4. A 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1 a_3 a_5 = 3\sqrt{3}$, $b_1 + b_3 + b_5 = \frac{3\pi}{4}$,

则 $a_3^3 = 3\sqrt{3}$, $b_1 + b_3 + b_5 = 3b_3 = \frac{3\pi}{4}$, 所以

$a_3 = \sqrt{3}$, $b_3 = \frac{\pi}{4}$,

则 $\cos \frac{b_2 + b_4}{a_2 a_4} = \cos \frac{2b_3}{a_3} = \cos \frac{2\pi}{3} =$

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.

5. B 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 由题意得 $T_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 = 4$, $T_5 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = 32$,

所以 $a_5 = \frac{T_5}{T_4} = 8$, 则 $a_1 q^4 = 8$, 即

$a_1 = \frac{8}{q^4}$,

又 $a_1 a_2 a_3 a_4 = a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot a_1 q^3 = a_1^4 q^6 = 4$,

将 $a_1 = \frac{8}{q^4}$ 代入可得 $\left(\frac{8}{q^4}\right)^4 q^6 = \frac{8^4}{q^{10}} = 4$,

即 $q^{10} = \frac{8^4}{4} = 2^{10}$,

所以 $q^2 = 2^2$, 则 $a_1 = \frac{8}{q^4} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$,

所以 $a_{2025} = a_1 q^{2024} = \frac{1}{2} \times (2^2)^{1012} = 2^{2023}$. 故选 B.

6. C 【解析】设第 n 个正方形的边长为 x_n , 则 $x_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}x_n\right)^2 + \left(\frac{1}{4}x_n\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}x_n$, 所以正方形的边长成等比数列, 其公比为 $\frac{\sqrt{10}}{4}$. 设第 n 个正方形的面积为 a_n , 则 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}$ ($n \geq 2$),

当 $n=1$ 时, $a_1 = 1$, 所以 $a_n = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$.

由 $a_n < \frac{1}{50} a_1$, 得 $\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} < \frac{1}{50}$, 所以 $(n-1) \lg \frac{5}{8} < \lg \frac{1}{50}$,

即 $n-1 > \frac{-\lg 50}{\lg 5 - \lg 8} = \frac{-\lg 5 - 1}{\lg 5 - 3 \lg 2} =$

$\frac{-(1 - \lg 2) - 1}{1 - \lg 2 - 3 \lg 2} = \frac{\lg 2 - 2}{1 - 4 \lg 2} \approx \frac{0.3 - 2}{1 - 4 \times 0.3} =$

$\frac{-1.7}{-0.2} = 8.5$, 所以 $n > 9.5$, 所以 $k = 10$. 故选 C.

7. ACD 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q > 0$).

由 $2a_4 + 3a_3 - 2a_2 = 0$, 得 $2a_2 q^2 + 3a_2 q - 2a_2 = 0$, 即 $2q^2 + 3q - 2 = 0$, 解得 $q = \frac{1}{2}$ 或 $q = -2$ (舍去).

因为 $a_1 = 14$, 所以 $a_n = 14 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 易知 $\{a_n\}$ 是递减数列, 故 A 正确, B 错误.

因为 $a_1 = 14, a_2 = 7, a_3 = \frac{7}{2}, a_4 = \frac{7}{4} > 1$,

$a_5 = \frac{7}{8} < 1$, 又 $a_n = 14 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 所以当 $n \geq 3$ 时, a_n 不为整数, 故 C 正确.

因为 $q = \frac{1}{2}$, 且 $a_4 = \frac{7}{4} > 1, a_5 = \frac{7}{8} < 1$, 所以 T_4 最大, 故 D 正确. 故选 ACD.

8. C 【解析】由题意得当 $n \geq 2$ 时, $\frac{S_n}{S_{n-1}} =$

$\frac{S_{n+1} - S_n}{S_n - S_{n-1}}$, 化简得 $S_n^2 = S_{n-1} S_{n+1}$, 又 $S_1 = a_1 = 1, S_2 = a_1 + a_2 = 2$, 故数列 $\{S_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 故 $S_n = 2^{n-1}$,

从而 $b_n = \sqrt{1 + \log_2 2^{n-1}} = \sqrt{n}$, 所以

$\log_2 b_n = \log_2 \sqrt{n} = \frac{1}{2} \log_2 n$.

故当 $1 \leq n \leq 3$ 时, $[\log_2 b_n] = 0$;

当 $4 \leq n \leq 15$ 时, $[\log_2 b_n] = 1$;

当 $16 \leq n \leq 63$ 时, $[\log_2 b_n] = 2$;

当 $64 \leq n \leq 255$ 时, $[\log_2 b_n] = 3$;

当 $n = 256$ 时, $[\log_2 b_n] = 4$,

所以 $\sum_{i=1}^{256} [\log_2 b_i] = 3 \times 0 + 12 \times 1 + 48 \times 2 + 192 \times 3 + 4 = 688$. 故选 C.

9. BC 【解析】令 $b_n = a_n + S_n, b_1 = a_1 + S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, 设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d , 又因为 $\{b_n\}$ 是等比数列, 所以 $b_2^2 = b_1 b_3$, 即 $(1+d)^2 = 1 \times (1+2d)$, 解得 $d = 0$, 于是 $b_n = a_n + S_n = 1$.

当 $n \geq 2$ 时, $b_n - b_{n-1} = a_n + S_n - (a_{n-1} + S_{n-1}) = 0$, 得 $a_n + S_n - S_{n-1} - a_{n-1} = 0$,

即 $a_n = \frac{1}{2} a_{n-1}$, 又因为 $a_1 = \frac{1}{2}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等

比数列, 所以 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, S_n = 1 - a_n =$

$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

对于 A: 显然 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 不是等差数列, 故 A 错误;

对于 B: 因为 $\frac{\ln a_n}{n} = \frac{\ln \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} =$

$\frac{n \ln \frac{1}{2}}{n} = \ln \frac{1}{2}$, 所以 $\left\{\frac{\ln a_n}{n}\right\}$ 是各项均

为 $\ln \frac{1}{2}$ 的常数列,

于是 $\left\{\frac{\ln a_n}{n}\right\}$ 是公比为 1 的等比数列,

【敲黑板】: 非零常数数列既是等差数列, 也是等比数列

故 B 正确;

对于 C: 由指数函数的单调性可知, 数列 $S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 为递增数列, 故 C 正确;

对于 D: 令 $c_n = n(n-1)a_n = \frac{n(n-1)}{2^n}$, 假设

数列 $\{c_n\}$ 的第 k 项最大, 则 $\begin{cases} c_k \geq c_{k+1}, \\ c_k \geq c_{k-1}, \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} \frac{k(k-1)}{2^k} \geq \frac{k(k+1)}{2^{k+1}}, \\ \frac{k(k-1)}{2^k} \geq \frac{(k-1)(k-2)}{2^{k-1}}, \end{cases} \text{ 解得 } 3 \leq k \leq 4,$$

因为 $k \in \mathbb{N}_+$, 所以 $k=3$ 或 $k=4$, 即数列 $\{n(n-1)a_n\}$ 的第 3 项和第 4 项相等且最大, 故 D 错误. 故选 BC.

10. $-\frac{1}{2}$ 【解析】由题知 $\beta=2\alpha, \gamma=4\alpha$,

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \frac{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \Rightarrow$$

$$2\cos^2 \alpha - \cos \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

或 1.

若 $\cos \alpha = 1$, 则 $\sin \alpha = 0$ (舍去).

从而 $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$.

11. 510 【解析】设第 n 层砌好后剩余砖块数为 a_n , 砖的总数为 S , 则由题可知递推关系为 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - 1, n \geq 2$.

$$\text{设 } a_n + \lambda = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \lambda), \text{ 展开得 } a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - \frac{\lambda}{2}, \text{ 则 } -\frac{\lambda}{2} = -1, \text{ 解得 } \lambda = 2.$$

【点悟】: 通过待定系数法, 构造等比数列求解

于是数列 $\{a_n + 2\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}S + 1$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,

$$\text{通项公式为 } a_n + 2 = \left(\frac{1}{2}S + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

由题可知第八层砌好后剩余砖块数为 0, 即 $a_8 = 0$, 代入得 $0 + 2 = \left(\frac{1}{2}S + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$, 即 $2 = \frac{S+2}{256}$, 解得 $S = 510$.

12. 【解】(1) 由题意, 经 $(n-1) (n \geq 2, n \in \mathbb{N}_+)$ 次调和后甲、乙两个容器中的溶液浓度分别为 a_n, b_n ,

$$\text{所以 } a_n = \frac{400a_{n-1} + 100b_{n-1}}{500} = \frac{4}{5}a_{n-1} +$$

$$\frac{1}{5}b_{n-1}, b_n = \frac{400b_{n-1} + 100a_{n-1}}{500} = \frac{4}{5}b_{n-1} +$$

$$\frac{1}{5}a_{n-1}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } a_n = \frac{4}{5}a_{n-1} + \frac{1}{5}b_{n-1},$$

$$b_n = \frac{4}{5}b_{n-1} + \frac{1}{5}a_{n-1},$$

$$\text{可得 } a_n - b_n = \frac{3}{5}a_{n-1} - \frac{3}{5}b_{n-1} =$$

$$\frac{3}{5}(a_{n-1} - b_{n-1}) (n \geq 2), \text{ 又 } a_1 - b_1 = -10\% \neq 0,$$

所以数列 $\{a_n - b_n\}$ 是等比数列,

$$\text{所以 } a_n - b_n = -10\% \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \text{ ①.}$$

$$\text{又因为 } a_n + b_n = a_{n-1} + b_{n-1} = \cdots = a_1 + b_1 = 30\% \text{ ②,}$$

$$\text{联立 ① ② 得 } a_n = -\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \times 5\% +$$

$$15\%, b_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \times 5\% + 15\%.$$

13. (1) 【证明】 $\because S_n = a_n - 4a_{n+1}$ ①,

$$\therefore S_{n+1} = a_{n+1} - 4a_{n+2} \text{ ②,}$$

$$\text{②} - \text{①} \Rightarrow a_{n+1} = a_{n+1} - 4a_{n+2} - a_n + 4a_{n+1},$$

$$\therefore 4a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n,$$

$$\text{故 } 4a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2a_{n+1} - a_n,$$

$$\therefore 2a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(2a_{n+1} - a_n).$$

在 ① 中令 $n=1 \Rightarrow a_1 = a_1 - 4a_2, \therefore a_2 = 0$. 又 $a_1 = S_1 = -1, \therefore 2a_2 - a_1 = 1 \neq 0$,

$\therefore$ 数列 $\{2a_{n+1} - a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

$$(2) \text{ 【解】由 (1) 得 } 2a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ 则}$$

$$2^n a_{n+1} - 2^{n-1} a_n = 1,$$

$\therefore$ 数列 $\{2^{n-1} a_n\}$ 是以 -1 为首项, 1 为公差的等差数列,

$$\therefore 2^{n-1} a_n = n - 2, \text{ 解得 } a_n = \frac{n-2}{2^{n-1}}.$$

$$\text{由 } a_{n+1} - a_n = \frac{n-1}{2^n} - \frac{n-2}{2^{n-1}} = \frac{3-n}{2^n} \text{ 得,}$$

当 $n \leq 2$ 时, $\{a_n\}$ 单调递增; 当 $n=3$ 时, $a_1 = a_3$; 当 $n \geq 4$ 时, $\{a_n\}$ 单调递减,

$$\therefore a_1 < a_2 < a_3 = a_4 > a_5 > a_6 > a_7 > \cdots > a_n > \cdots,$$

$$\therefore \text{数列 } \{a_n\} \text{ 的最大项为 } a_3 = a_4 = \frac{1}{4}.$$

刷易错

★易错点 1 项的正负判断不准确, 出现多解而致错

14. D 【解析】在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 因为 $a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 = 8$, 所以 $a_6^3 = 8$, 即 $a_6 = 2$, 所以 $a_4^2 = a_2 \cdot a_6 = 18 \times 2 = 36$, 又因为 a_4 与 a_6 同号, 所以 $a_4 = 6$. 故选 D.

【易错警示】等比数列中各项不为 0, 且奇数项的符号相同, 偶数项的符号相反. 本题易错解为 $a_4 = \pm 6$.

★易错点 2 条件应用不充分, 出现公比多解而致错

15. C 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, \therefore a_n a_{n+1} = 4^{n-1} > 0, \therefore a_{n+1} a_{n+2} = 4^n$

$$\text{且 } q > 0, \text{ 两式相除可得 } \frac{a_{n+1} a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = \frac{4^n}{4^{n-1}} =$$

4, 即 $q^2 = 4, \therefore q = 2$. 故选 C.

16. 2ⁿ 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $2(a_n + a_{n+2}) = 5a_{n+1}$, 整理得 $2q^2 - 5q + 2 = 0$, 解得 $q = 2$ 或 $q = \frac{1}{2}$. 由 $a_5^2 = a_{10} = a_1 q^9 > 0$ 得 $a_1 > 0$. 又因为数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 所以 $q = 2$. 由 $(a_1 q^4)^2 = a_1 q^9$, 解得 $a_1 = q = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$.

【易错警示】第 15 题易忽略 $q > 0$, 错解为 $q = \pm 2$; 第 16 题易忽略 $a_1 > 0$, 错解为 $q = 2$ 或 $q = \frac{1}{2}$, 原因在于没有充分利用条件.

★易错点 3 等比数列的设法忽视公比的取值范围致错

17. $3 \pm 2\sqrt{2}$ 或 $-5 \pm 2\sqrt{6}$ 【解析】设该等比数列的前 4 项依次为 a, aq, aq^2, aq^3 (其中 $aq \neq 0$),

$$\text{由题意得 } \begin{cases} a \cdot aq \cdot aq^2 \cdot aq^3 = \frac{1}{16}, \\ aq + aq^2 = \sqrt{2}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} a^2 q^3 = \pm \frac{1}{4}, \\ a^2 (q + q^2)^2 = 2, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \frac{a^2 q^3}{a^2 (q + q^2)^2} = \pm \frac{1}{8}, \text{ 整理得 } q^2 - 6q + 1 = 0 \text{ 或 } q^2 + 10q + 1 = 0, \text{ 解得 } q = 3 \pm 2\sqrt{2} \text{ 或 } q = -5 \pm 2\sqrt{6}.$$

【易错警示】涉及三个数依次成等比数列时常将此三个数依次设为 $\frac{a}{q}, a, aq (aq \neq 0)$. 涉及四个数依次成等比数列时, 若已知四个数同号, 则常依次设为 $\frac{a}{q^3}, \frac{a}{q}, aq, aq^3 (aq \neq 0)$; 若不能确定这四个数的符号, 则常依次设为 $a, aq, aq^2, aq^3 (aq \neq 0)$. 本题易错设四个数依次为 $\frac{a}{q^3}, \frac{a}{q}, aq, aq^3 (aq \neq 0)$, 公比为 q^2 , 相当于规定了这个等比数列各项要么同正, 要么同负, 而算出公比为 $3 \pm 2\sqrt{2}$, 造成漏解.

刷素养

18. 【解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

$$\text{由题意得 } a_1 = 2, a_3 (a_9 + 6) = a_6^2, \text{ 则 } (2+2d)(2+8d+6) = (2+5d)^2, \text{ 解得 } d = 2 \text{ 或 } d = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{由 } \sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} = 3^n - 1 \text{ ①,}$$

$$\text{得 } \sum_{i=1}^n a_i b_{n+2-i} = 3^{n+1} - 1 \text{ ②,}$$

$$\text{②} - \text{①}, \text{ 得 } a_1 b_{n+1} + d \sum_{i=1}^n b_i = 2 \cdot 3^n.$$

$$\text{当 } d = 2 \text{ 时, } 2b_{n+1} + 2 \sum_{i=1}^n b_i = 2 \cdot 3^n, \text{ 即}$$

$2 \sum_{i=1}^{n+1} b_i = 2 \cdot 3^n$, 得 $T_{n+1} = 3^n$, 则 $T_n = 3^{n-1}$.

当 $d = -\frac{2}{3}$ 时, $2b_{n+1} - \frac{2}{3}T_n = 2 \cdot 3^n$, 即

$$2(T_{n+1} - T_n) - \frac{2}{3}T_n = 2 \cdot 3^n, \text{ 得 } T_{n+1} = \frac{4}{3}T_n + 3^n,$$

则 $T_{n+1} - \frac{3}{5} \cdot 3^{n+1} = \frac{4}{3} \left(T_n - \frac{3}{5} \cdot 3^n \right)$,
又 $n=1$ 时, $a_1 b_1 = 3^1 - 1 = 2$, 则 $b_1 = 1$,
所以 $T_1 - \frac{3}{5} \times 3 = \frac{4}{5}$,

所以 $\left\{ T_n - \frac{3}{5} \cdot 3^n \right\}$ 是首项为 $-\frac{4}{5}$, 公比为 $\frac{4}{3}$ 的等比数列,

$$\text{所以 } T_n - \frac{3}{5} \cdot 3^n = -\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1}, \text{ 则 } T_n = \frac{3^{n+1}}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right].$$

综上所述, 当 $d=2$ 时, $T_n = 3^{n-1}$; 当 $d = -\frac{2}{3}$ 时, $T_n = \frac{3^{n+1}}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right]$.

5.3.2 等比数列的前 n 项和

课时 1 等比数列的前 n 项和(1)

刷基础

1. D 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q ,

A, 当 $a_n = 1$ 时, $S_n = n$, A 中图符合.

B, 当 $a_1 = 1, q = 1$ 时, $a_n = 1 \cdot 1^{n-1}, S_n = \frac{1-1 \cdot 1^n}{1-1} = 10(1 \cdot 1^n - 1)$, B 中图符合.

C, 当 $a_1 = 1, q = -2$ 时, $a_n = (-2)^{n-1}, S_n = \frac{1-(-2)^n}{3}$, C 中图符合.

D, 由题图可知, a_1, a_2, a_3 都是负数, 所以 $a_1 < 0, q > 0$, 则 $a_n < 0, S_n < 0$, 但 D 中图显示当 $n \geq 4$ 时, a_n 或 S_n 为正数, 矛盾, 故 D 中图不符合. 故选 D.

2. 18 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 当 $q=1$ 时, $S_n = a_1 n$, 不满足题意, 故 $q \neq 1$, 此时 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n$, 所以 q^n 的系数和常数项互为相反数, 则 $m=3, q=3$. 故 $a_1 = S_1 = 6$, 所以 $a_2 = a_1 q = 18$.

多种解法 因为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = m \cdot 3^n - 3$ (m 是常数), 所以当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 3m - 3$, 当 $n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}_+$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (m \cdot 3^n - 3) - (m \cdot 3^{n-1} - 3) = 2m \cdot 3^{n-1}$. 因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 $a_1 = 3m - 3$ 也满足 $a_n = 2m \cdot 3^{n-1}$, 即 $a_1 = 3m - 3 = 2m$, 解得 $m=3$, 故 $a_n = 2 \cdot 3^n$, 则 $a_2 = 2 \times 3^2 = 18$.

二级结论 当公比 $q \neq 1$ 时, 等比数列的前 n 项和公式是 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = -\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n + \frac{a_1}{1-q}$.

由此可见, 非常数列的等比数列的前 n 项和 S_n 是一个关于 n 的指数型函数与一个常数的和, 且指数型函数的系数与该常数互为相反数.

3. B 【解析】当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 3$,

$$\text{又 } q=2, \text{ 则 } S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = \frac{3 \times (1-2^3)}{1-2} = 21. \text{ 故选 B.}$$

4. B 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, q > 0$,

由已知得 $a_4 + 3a_3 = 2 \times 5a_2 = 10a_2$,

即 $a_2 q^2 + 3a_2 q = 10a_2$,

因为 $a_2 = 2$, 所以 $q^2 + 3q - 10 = 0$.

解得 $q=2$ 或 $q=-5$ (舍去), 则 $a_1 = 1$,

所以该数列的前 5 项和 $S_5 =$

$$\frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{1 \times (1-2^5)}{1-2} = 31. \text{ 故选 B.}$$

5. AC 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 1)$, 则由 $a_2 > 0, \{a_n\}$ 单调递增, 得 $q > 1$.

因为 $S_3 = a_2 \left(1 + q + \frac{1}{q} \right)$, 所以

$$\frac{3}{2} \left(1 + q + \frac{1}{q} \right) = \frac{19}{4}, \text{ 解得 } q = \frac{3}{2} \text{ 或 } q = \frac{2}{3} \text{ (舍去).}$$

对于 A, $a_1 = \frac{a_2}{q} = 1$, 故 A 正确;

对于 B, $a_n = a_1 q^{n-1} = \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}, a_5 - a_3 = \frac{81}{16} - \frac{9}{4} = \frac{45}{16}$, 故 B 错误;

$$\text{对于 C, } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1 - \left(\frac{3}{2} \right)^n}{1 - \frac{3}{2}} =$$

$$2 \times \left(\frac{3}{2} \right)^n - 2, \text{ 则 } S_4 = 2 \times \frac{81}{16} - 2 = \frac{65}{8}, \text{ 故}$$

C 正确;

对于 D, $S_m + 2 = 2 \times \left(\frac{3}{2} \right)^m$, 则 $\frac{S_{m+1} + 2}{S_m + 2} =$

$$\frac{3}{2}, \text{ 且 } S_1 + 2 = 2 \times \left(\frac{3}{2} \right)^1 = 3,$$

所以 $\{S_m + 2\}$ 是首项为 3, 公比为 $\frac{3}{2}$ 的

等比数列, 故 D 错误. 故选 AC.

6. 【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

因为 $S_{10} = 5a_6$, 且 $2a_1 = 4 + a_5$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 10a_1 + 45d = 5(a_1 + 5d), \\ 2a_1 = 4 + a_1 + 4d, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} a_1 + 4d = 0, \\ a_1 = 4 + 4d, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} d = -\frac{1}{2}, \\ a_1 = 2, \end{cases}$$

$$\text{所以 } a_n = a_1 + (n-1)d = -\frac{1}{2}n + \frac{5}{2},$$

$$\text{所以数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = -\frac{1}{2}n + \frac{5}{2}.$$

$$(2) \text{ 由题知, } b_n = a_{2^n} = -\frac{1}{2} \times 2^n + \frac{5}{2}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } T_n = \left(-\frac{1}{2} \times 2^1 + \frac{5}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} \times 2^2 + \right.$$

$$\left. \frac{5}{2} \right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2} \times 2^n + \frac{5}{2} \right) = -\frac{1}{2} (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) + \frac{5}{2} n = -\frac{1}{2} \times \frac{2 \times (1-2^n)}{1-2} + \frac{5}{2} n = -2^n + \frac{5}{2} n + 1.$$

7. C 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 因为 $S_3 = 3, S_6 = 9$,

若 $q=1$, 则 $S_3 = 3a_1 = 3$, 得 $a_1 = 1$, 则 $S_6 = 6a_1 = 6 \neq 9$, 故 $q \neq 1$,

$$\text{则 } \frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}} = \frac{1-q^6}{1-q^3} = 1+q^3 = \frac{9}{3} =$$

$$\text{点悟: 当 } q \neq 1 \text{ 时, } \frac{S_n}{S_m} = \frac{1-q^n}{1-q^m}$$

3, 所以 $q^3 = 2$.

$$\text{所以 } \frac{S_{15}}{S_3} = \frac{\frac{a_1(1-q^{15})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}} = \frac{1-q^{15}}{1-q^3} = \frac{1-2^5}{1-2} = 31, \text{ 所}$$

以 $S_{15} = 31S_3 = 31 \times 3 = 93$. 故选 C.

链接教材 本题是教材第 42 页练习 B 第 3 题的变式与延伸.

在等比数列的通项公式 a_n 与前 n 项和公式 S_n 中, 共涉及五个相关量: a_1, q, n, a_n, S_n , 利用等比数列的通项公式及前 n 项和公式即可“知三求二”. 同时还要注意整体思想, 有时可把 q^n 看作一个整体代换求解.

8. B 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

由题可知, $a_1 \neq 0, q \neq 0$.

当 $q=1$ 时, 由 $2S_9 = S_3 + S_6$ 得 $18a_1 = 3a_1 + 6a_1$, 解得 $a_1 = 0$, 矛盾, 所以 $q \neq 1$.

当 $q \neq 1, 0$ 时, 由 $2S_9 = S_3 + S_6$ 得 $\frac{2a_1}{1-q} (1 -$

$$q^9) = \frac{a_1}{1-q} (1 - q^3) + \frac{a_1}{1-q} (1 - q^6), \text{ 即}$$

$$q^3(q^3 - 1)(2q^3 + 1) = 0, \text{ 解得 } q^3 = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } a_7 = a_1 q^6 = -2 \times \left(-\frac{1}{2} \right)^2 = -\frac{1}{2}. \text{ 故}$$

选 B.

多种解法一 由 $a_1 = -2$, 可知 $a_7 < 0$, 排除 C, D.

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 当 $q=1$ 时, 由 $2S_9 = S_3 + S_6$ 得 $18a_1 = 3a_1 + 6a_1$, 解得 $a_1 = 0$, 矛盾, 所以 $q \neq 1$;

当 $q=-1$ 时, $S_3 = -2, S_6 = 0, S_9 = -2$, 则 $S_3 + S_6 \neq 2S_9$, 所以 $q \neq -1$.

综上, 可知 $a_7 \neq -2$, 故排除 A. 故选 B.

多种解法二 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由等比数列前 n 项和的性质 $S_{m+n} = S_m + q^m S_n$,

$$\text{可知 } S_9 = S_3 + q^3 S_6 = S_6 + q^6 S_3,$$

$$\text{则 } 2S_9 = S_3 + S_6 + q^3 S_6 + q^6 S_3,$$

由题可知, $2S_9 = S_3 + S_6$, 则 $q^3 S_6 + q^6 S_3 = 0$, 即 $S_6 + q^3 S_3 = 0$.

又 $S_6 = S_3 + q^3 S_3 = (1+q^3) S_3$,

所以 $(1+2q^3) S_3 = 0$, 解得 $q^3 = -\frac{1}{2}$ 或 $S_3 = 0$.

当 $S_3 = 0$ 时, $a_1(1+q+q^2) = 0$, q 无解, 故 $S_3 = 0$ 舍去.

所以 $q^3 = -\frac{1}{2}$, 所以 $a_7 = a_1 q^6 = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$. 故选 B.

9. $\frac{5}{3}$ 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $5S_2 - 4S_4 = 0$ 可得, $5(a_1 + a_2) = 4(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 4(a_1 + a_2) + 4q^2(a_1 + a_2)$, 若 $a_1 + a_2 = 0$, 又 $a_1 \neq 0$, 则 $q = -1$, 这与 $a_5 - a_7 = a_5(1 - q^2) \neq 0$ 矛盾; 所以 $a_1 + a_2 \neq 0$, 则 $q^2 = \frac{1}{4}$, 从而

$$\frac{a_5 + a_7}{a_5 - a_7} = \frac{a_5(1 + q^2)}{a_5(1 - q^2)} = \frac{1 + q^2}{1 - q^2} = \frac{5}{3}.$$

课时2 等比数列的前 n 项和(2)

刷基础

1. B 【解析】在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 公比

$$q = 3, \text{ 则有 } \frac{a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}}{a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99}} = q = 3,$$

【点悟】等比数列 $\{a_n\}$ 的项数为 $2n$ 时, $\frac{S_{偶}}{S_{奇}} = q$

而 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = 50$, 于是得 $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100} = 150$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项和 $S_{100} = (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99}) + (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) = 50 + 150 = 200$. 故选 B.

2. B 【解析】由等比数列的前 n 项和性质得 $S_{10}, S_{20} - S_{10}, S_{30} - S_{20}$ 成等比数列, 所以 $(S_{20} - S_{10})^2 = S_{10}(S_{30} - S_{20})$, 所以 $(30 - 10)^2 = 10(S_{30} - 30)$, 解得 $S_{30} = 70$. 故选 B.

【多种解法】对等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 有 $S_{n+m} = S_n + q^m S_n$, $\therefore S_{20} = S_{10} + q^{10} S_{10}$, 即 $10(1 + q^{10}) = 30$, $\therefore q^{10} = 2$. $\therefore S_{30} = S_{10} + q^{10} S_{20} = 70$, 故选 B.

【链接教材】本题是教材第 42 页练习 B 第 2 题的变式与延伸, 考查等比数列前 n 项和性质的应用.

在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 当 $q \neq -1$ 时, $S_k, S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k}, \dots$ 是公比为 q^k ($k \in \mathbf{N}_+$) 的等比数列; 当 $q = -1$ 且 k 为偶数时, $S_k, S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k}, \dots$ 不是等比数列; 当 $q = -1$ 且 k 为奇数时, $S_k, S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k}, \dots$ 是公比为 -1 的等比数列.

3. B 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 因为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\frac{S_3}{S_6} = 3$, 所以 $q \neq 1$,

【点悟】若 $q = 1$, 则 $S_3 = 3a_1, S_6 = 6a_1, \frac{S_3}{S_6} = \frac{1}{2}$, 不符合题意

$$\text{所以 } \frac{S_3}{S_6} = \frac{\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}} = \frac{1}{1+q^3} = 3, \text{ 解得}$$

$$q^3 = -\frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } \frac{S_9}{S_6} = \frac{\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}} = \frac{(1-q^3)(1+q^3+q^6)}{(1+q^3)(1-q^3)} = \frac{1+q^3+q^6}{1+q^3} = \frac{1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{7}{3}. \text{ 故选 B.}$$

【多种解法】由 $\frac{S_3}{S_6} = 3$, 不妨设 $S_3 = 3$, $S_6 = 1$, 而 $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6$ 也成等比数列, 则 $(S_6 - S_3)^2 = S_3 \cdot (S_9 - S_6)$, 即 $(-2)^2 = 3 \cdot (S_9 - 1)$,

$$\text{解得 } S_9 = \frac{7}{3}, \text{ 故 } \frac{S_9}{S_6} = \frac{\frac{7}{3}}{1} = \frac{7}{3}.$$

【二级结论】公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的性质

(1) 当 $q \neq -1$ 时, $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}$ ($m \in \mathbf{N}_+$) 仍构成等比数列.

(2) $S_{m+n} = S_m + q^m S_n$.

(3) 若 $\{a_n\}$ 的项数为偶数, 则 $\frac{S_{偶}}{S_{奇}} = q$;

若 $\{a_n\}$ 的项数为奇数, 则 $\frac{S_{偶}-a_1}{S_{奇}} = q$.

4. -2 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 有 $(2n+1)$ 项, 则奇数项有 $n+1$ 项, 偶数项有 n 项, 则奇数项的和为 $a_1(1+q^2+q^4+\cdots+q^{2n}) = 255$,

偶数项的和为 $a_1(q+q^3+q^5+\cdots+q^{2n-1}) = -126$,

$$\text{所以 } qa_1(1+q^2+q^4+\cdots+q^{2n}) = 255q,$$

$$\text{即 } a_1(q+q^3+q^5+\cdots+q^{2n-1}) + qa_{2n+1} = 255q,$$

$$\text{可得 } -126 + 192q = 255q, \text{ 解得 } q = -2.$$

5. C 【解析】因为 $S = 1 \times 2^{2026} + 2 \times 2^{2025} + 3 \times 2^{2024} + 4 \times 2^{2023} + 5 \times 2^{2022} + \cdots + 2026 \times 2^1$,

$$\text{所以 } \frac{S}{2^{2026}} = 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2^2} + 4 \times \frac{1}{2^3} + 5 \times \frac{1}{2^4} + \cdots + 2026 \times \frac{1}{2^{2025}},$$

$$\text{则 } \frac{S}{2^{2027}} = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2^2} + 3 \times \frac{1}{2^3} + 4 \times \frac{1}{2^4} +$$

$$5 \times \frac{1}{2^5} + \cdots + 2026 \times \frac{1}{2^{2026}},$$

$$\text{两式作差得 } \frac{S}{2^{2026}} - \frac{S}{2^{2027}} = 1 + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times$$

$$\frac{1}{2^2} + 1 \times \frac{1}{2^3} + 1 \times \frac{1}{2^4} + 1 \times \frac{1}{2^5} + \cdots + 1 \times \frac{1}{2^{2025}} -$$

$$2026 \times \frac{1}{2^{2026}},$$

$$\text{所以 } \frac{S}{2^{2026}} - \frac{S}{2^{2027}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{2026}}}{1 - \frac{1}{2}} - 2026 \times$$

$$\frac{1}{2^{2026}} = 2 - \frac{2}{2^{2026}} - 2026 \times \frac{1}{2^{2026}},$$

$$\text{即 } \frac{S}{2^{2027}} = 2 - \frac{2028}{2^{2026}},$$

则 $S = 2^{2028} - 4056$. 故选 C.

6. 【解】(1) 因为 $S_{n+1} + 3a_{n+1} + 9 = 0$ ①, 所以 $S_n + 3a_n + 9 = 0$ ②,

由 ① - ② 得 $a_{n+1} + 3a_{n+1} - 3a_n = 0$, 即

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n, \text{ 又 } a_1 = -\frac{9}{4} \neq 0,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $-\frac{9}{4}$ 为首项, $\frac{3}{4}$ 为公比的等比数列,

$$\text{则 } a_n = -\frac{9}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = -3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

(2) 由 (1) 知 $a_n = -3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$, 又 $3b_n +$

$$(n-4)a_n = 0 \ (n \in \mathbf{N}_+), \text{ 所以 } b_n = (n-4) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

$$\text{则 } T_n = -3 \cdot \frac{3}{4} + (-2) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots +$$

$$(n-4) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{③},$$

$$\frac{3}{4}T_n = -3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + (-2) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots +$$

$$(n-4) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \quad \text{④},$$

【敲黑板】错位相减法求和, 宁可多写几项, 也不要简单的计算中出错

$$\text{由 ③ - ④ 得, } \frac{1}{4}T_n = -3 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 +$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n - (n-4) \cdot$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = -\frac{9}{4} + \frac{\frac{9}{16} \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right]}{1 - \frac{3}{4}} -$$

$$(n-4) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = -n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1},$$

$$\text{所以 } T_n = -4n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}.$$

7. B 【解析】由题意可知, 大老鼠每天打洞的距离成首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 小老鼠每天打洞的距离成首

项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, $\therefore$ 两只老鼠前 n 天打洞的距离之和 $S_n =$

$$\frac{1-2^n}{1-2} + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2^n - \frac{1}{2^{n-1}} + 1.$$

$\therefore$ 函数 $y = 2^x - \frac{1}{2^{x-1}} + 1$ 是增函数, $S_4 =$

$$\frac{135}{8} < 20, S_5 = \frac{527}{16} > 20,$$

$\therefore$ 这两只老鼠相逢所需天数至少为 5. 故选 B.

刷易错

★易错点 利用等比数列求和公式时忽视 $q=1$ 的情形而致错

8. B 【解析】因为 $a_1=1$, 所以当 $q=1$ 时, $a_1+a_2+a_3=3$, 所以 $S_3=3$,

$$\text{当 } q \neq 1 \text{ 时, } S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 3 \quad (q \neq 1),$$

解得 $q=-2$, 所以“ $S_3=3$ ”是“ $q=-2$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

易错警示 在等比数列的求和公式中, 当公比 $q=1$ 时, $S_n=na_1$, 因此涉及等比数列求和时要注意对 q 分类讨论, 本题求解的易错之处是忽视对 $q=1$ 的讨论而错解.

刷提升

1. C 【解析】 $f(n)$ 的各项 $2, 2^4, 2^7, 2^{10}, \dots, 2^{3n+7}$ 构成一个首项为 $a_1=2$, 公比 $q=8$ 的等比数列, 且共有 $\frac{(3n+7)-1}{3}+1=n+3$ 项,

$$\therefore f(n) = 2 + 2^4 + 2^7 + 2^{10} + \dots + 2^{3n+7} = \frac{2(1-8^{n+3})}{1-8} = \frac{2}{7}(8^{n+3}-1). \text{ 故选 C.}$$

2. C 【解析】因为 $\log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n = 1$,

所以 $\log_2 \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, 则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=1$ 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $S_n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1$, 故选 C.

3. D 【解析】设该等比数列为 $\{a_n\}$, 其公比为 q , 且前 n 项和为 S_n , 若 $q=1$, 则 $S_3=3a_1=3$, 所以 $a_1=1$, 又 $S_6=6a_1=6 \neq -21$, 故 $q=1$ 不符合题意;

若 $q \neq 1$, 则根据题意可知 $S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 3$, 且 $S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = -21$, 解得 $a_1=1, q=-2$, 故 $a_4=a_1q^3=-8$. 故选 D.

4. A 【解析】设 $S_2=x$, 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题意 $q \neq -1$. 因为 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 $S_2, S_4-S_2, S_6-S_4, S_8-S_6$ 成等比数列,

点悟: 等比数列片段和性质的应用

得 $(S_4-S_2)^2 = S_2(S_6-S_4)$, 又 $S_4=3, S_6=31S_2$,

$$\text{所以 } (3-x)^2 = x(31x-3),$$

化简可得 $10x^2+x-3=0$, 即 $(2x-1)(5x+3)=0$, 解得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=-\frac{3}{5}$.

当 $S_2=\frac{1}{2}$ 时, $S_4-S_2=\frac{5}{2}$, 则 $S_6-S_4=$

$$\frac{25}{2}, S_8-S_6=\frac{125}{2}, \text{ 因为 } S_6=\frac{31}{2}, \text{ 所以}$$

$$S_8=78;$$

当 $S_2=-\frac{3}{5}$ 时, $S_4=(1+q^2)S_2=3$,

得 $1+q^2=-5, q^2=-6$, 无解, 舍去. 故选 A.

5. B 【解析】联立 $\begin{cases} a_1+a_4=18, \\ a_2a_3=a_1a_4=32, \end{cases}$ 可得

$$\begin{cases} a_1=2, \\ a_4=16 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_1=16, \\ a_4=2. \end{cases}$$

又因为数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列,

所以 $\begin{cases} a_1=2, \\ a_4=16, \end{cases}$ 则公比 $q=2, a_n=2^n$,

$$S_{k+6}-S_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+6} = \frac{2^{k+1}(1-2^6)}{1-2} = 2^{k+7}-2^{k+1}, \text{ 所以 } S_{k+6}-S_k =$$

$$2^{k+7}-2^{k+1} = 2^{11}-2^5, \text{ 所以 } k=4. \text{ 故选 B.}$$

6. B 【解析】由 $2a_n a_{n+1} + a_{n+1} = 3a_n, a_2 = \frac{9}{11}$ 可得 $2a_1 a_2 + a_2 = 3a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{5}$,

易知 $a_n \neq 0$, 则 $2a_n a_{n+1} + a_{n+1} = 3a_n$ 等式

两边同时除以 $a_n a_{n+1}$, 可得 $2 + \frac{1}{a_n} =$

$$\frac{3}{a_{n+1}}, \text{ 整理得 } \frac{1}{a_n} - 1 = 3\left(\frac{1}{a_{n+1}} - 1\right), \text{ 又 } \frac{1}{a_1} - 1 = \frac{2}{3}, \text{ 所以 } \frac{1}{a_n} - 1 \neq 0,$$

避坑: 一定要说明等比数列中的项不为 0

所以 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公

比的等比数列, 则 $\frac{1}{a_n} - 1 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} =$

$$2\left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

$$\text{故 } \frac{1}{a_1} - 1 + \frac{1}{a_2} - 1 + \dots + \frac{1}{a_n} - 1 =$$

$$\frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) - n, \text{ 故 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots +$$

$$\frac{1}{a_n} = n + 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

易知 $f(n) = n + 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ($n \in \mathbf{N}_+$) 单调

递增, $f(99) = 100 - \frac{1}{3^{99}} < 100 < f(100) =$

$$101 - \frac{1}{3^{100}}, \text{ 所以使不等式 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots +$$

$$\frac{1}{a_n} < 100 \text{ 成立的 } n \text{ 的最大值为 } 99.$$

故选 B.

7. C 【解析】由题意知 $a_n = 2M \cdot 2^{n-1} = 2^n M$, 设第 k 轮训练的模型参数的数量为 T_k , 则 $T_1 = M$, 当 $k \geq 2$ 时, $T_k = M + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} = M + M(2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}) = (2^k - 1)M, T_1 = M < 1024M$,

当 $k \geq 2$ 时, 令 $T_k > 1024kM$, 则 $(2^k - 1)M > 1024kM$, 即 $2^k - 1024k - 1 > 0$,

设 $b_k = 2^k - 1024k - 1, k \geq 2$, 则 $b_{k+1} - b_k = 2^{k+1} - 1024(k+1) - 1 - (2^k - 1024k - 1) = 2^k - 1024$,

当 $2 \leq k \leq 9$ 时, $b_{k+1} - b_k < 0$,

当 $k=10$ 时, $b_{k+1} - b_k = 0$,

当 $k \geq 11$ 时, $b_{k+1} - b_k > 0$,

所以 $b_2 > \dots > b_{10} = b_{11} < b_{12} < \dots$, 又 $b_2 = -2045 < 0, b_{13} = -5121 < 0, b_{14} = 2047 > 0$,

所以满足 $2^k - 1024k - 1 > 0$ 的最小正整数是 14, 即当第 k 轮训练的模型参数的数量大于 $1024kM$ 时, k 的最小值为 14. 故选 C.

8. ABD 【解析】对于 A, 因为 a_4, a_3, a_5 成等差数列, 所以 $2a_3 = a_4 + a_5$,

即 $2a_3 = a_3q + a_3q^2$, 因为 $a_3 \neq 0$, 所以 $q^2 + q - 2 = 0$, 解得 $q = -2$ 或 $q = 1$ (舍去), 故 A 正确;

对于 B, 由 A 知 $a_n = a_1q^{n-1} = 2 \times (-2)^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot 2^n$, 则 $|a_n| = 2^n$, 则 $\log_2 |a_n| = n$, 所以 $\log_2 |a_{n+1}| - \log_2 |a_n| = n+1-n = 1$, 即数列 $\{\log_2 |a_n|\}$ 是等差数列, 故 B 正确;

对于 C, 由 B 知 $a_n = (-1)^{n-1} \cdot 2^n$, 则 $a_3 a_4 \dots a_9 = (-1)^{2+3+4+\dots+8} \times 2^{3+4+5+\dots+9} = (-1)^{35} \times (2^6)^7 = -64^7$, 故 C 错误;

对于 D, 数列 $\{a_n\}$ 的所有奇数项之和为 $S_{\text{奇}} = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2m-1} = 2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{2m-1} = 2 \times \frac{4^m - 1}{4 - 1} = \frac{2}{3}(4^m - 1)$,

所有偶数项之和为 $S_{\text{偶}} = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2m} = -(2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2m}) =$

$$-4 \times \frac{4^m - 1}{4 - 1} = -\frac{4}{3}(4^m - 1), \text{ 则 } \frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = -2, \text{ 故}$$

D 正确. 故选 ABD.

9. ACD 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 0$, 易知首项 $a_1 > 0$,

由题意知, $S_2 = a_1 + a_2 = a_1(1+q) = 3$, $S_5 - S_3 = a_4 + a_5 = a_1q^3(1+q) = 24$,

两式相除得 $q^3 = 8$, 则 $q = 2$, 代入上式得 $a_1 = 1$.

选项 A, 由上述计算, 知 $a_n = 2^{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}_+$), 故 A 正确;

选项 B, $\lg a_n = \lg 2^{n-1} = (n-1) \lg 2 \neq n-1$, 故 B 错误;

选项 C, $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2^{n-1}}$, 则 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 1,

公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,

$$\text{则 } A_n = \frac{1 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$\text{因为 } A_{n+1} - A_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} > 0,$$

所以 $A_{n+1} > A_n$, 所以 $\{A_n\}$ 是递增数列, 故 C 正确;

$$\text{选项 D, } B_n = \frac{1}{2^0} \times \frac{1}{2^1} \times \frac{1}{2^2} \times \dots \times \frac{1}{2^{n-1}} = 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} > 0,$$

$$\text{则 } \frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} < 1, \text{ 又 } B_n > 0, \text{ 所以}$$

$B_{n+1} < B_n$, 因此数列 $\{B_n\}$ 为递减数列, D 正确. 故选 ACD.

10. A 【解析】对于 ①: 若 $\{a_n\}$ 具有“性质 P”, 则对任意的正整数 n , 总存在正整数 m 使得 $S_n = a_m$.

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$,

因为 $\{a_n\}$ 具有“性质 P”, 所以存在正整数 m_1, m_2 , 使得 $S_n = a_{m_1}, S_{n-1} = a_{m_2}$,

所以 $a_n = a_{m_1} - a_{m_2}$.

当 $n=1$ 时, $a_1=S_1$, 由“性质 P ”可得, 存在正整数 m , 使得 $S_1=a_m$, 即 $a_1=a_m$,

当 $m \geq 2$ 时, $a_m=S_m-S_{m-1}$, 由“性质 P ”可得, 存在正整数 t, p , 使得 $S_m=a_t, S_{m-1}=a_p$, 则 $a_1=a_m=a_t-a_p$.

综上, $\{a_n\}$ 中任意一项均可写成 $\{a_n\}$ 中的两项之差, 故①正确.

对于②: 因为 $a_n=2^n$, 所以 $S_n=\frac{2(1-2^{n+1})}{1-2}=2^{n+1}-2$,

假设 $\{a_n\}$ 具有“性质 P ”, 则对任意的正整数 n , 总存在正整数 m 使得 $S_n=a_m$,

即 $2^{n+1}-2=a_m=2^m$, 当 $n=1$ 时, $S_1=a_1=2$, 此时 $m=1$ 符合题意;

当 $n=2$ 时, $S_2=6$, 6 不是 2 的整数次幂, 即不存在正整数 m , 使得 $2^m=6$, 因此等比数列 $a_n=2^n$ 不具有“性质 P ”, 故②正确. 故选 A.

11. 2.88 8 【解析】由题意可知第 3 年新建设了 $2 \times (1+0.2)^2 = 2.88$ 万个充电桩;

假设 n 年后充电桩总量达到 30 万个, 则 $2 + 2 \times (1+0.2) + \dots + 2 \times (1+0.2)^{n-1} \geq 30$,

即 $\frac{2(1-1.2^n)}{1-1.2} \geq 30 \Rightarrow 1.2^n \geq 4$, 取常用

对数整理得 $n \geq \frac{2\lg 2}{\lg 6 - \lg 5} =$

$\frac{2\lg 2}{2\lg 2 + \lg 3 - 1} \approx \frac{0.602}{0.079} \approx 7.62$, 即约 8 年后, 可达到要求.

12. (1) 【证明】由 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2^{n+1}}$ 可得,

$2^{n+1} \cdot a_{n+1} = 2^n \cdot a_n + 1$, 即 $2^{n+1} \cdot a_{n+1} - 2^n \cdot a_n = 1$,

又 $2^1 \cdot a_1 = 1$, 因此 $\{2^n \cdot a_n\}$ 是以 1 为公差, 1 为首项的等差数列.

(2) 【证明】由(1)得, $2^n \cdot a_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$, 则 $a_n = \frac{n}{2^n}$,

则 $T_n = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2^2} + \dots + n \cdot \frac{1}{2^n}$,

$\frac{1}{2}T_n = 1 \times \frac{1}{2^2} + 2 \times \frac{1}{2^3} + \dots + (n-1) \cdot \frac{1}{2^n} + n \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$,

所以 $\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} - n \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$,

$\frac{1}{2^{n+1}}$,

即 $\frac{1}{2}T_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1 -$

$\frac{1}{2^n} - n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - (n+2) \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$,

所以 $T_n = 2 - (n+2) \cdot \frac{1}{2^n}$,

又 $n \in \mathbf{N}_+$, 所以 $(n+2) \cdot \frac{1}{2^n} > 0$, 因此

$T_n < 2$.

(3) 【解】由(2)得 $a_n = \frac{n}{2^n}$, 所以 $b_n =$

$\frac{n(2n+1)}{2^n}, b_{n+1} = \frac{(n+1)(2n+3)}{2^{n+1}}$,

所以 $b_{n+1} - b_n =$

$\frac{(n+1)(2n+3) - 2n(2n+1)}{2^{n+1}} =$

$\frac{-2n^2 + 3n + 3}{2^{n+1}} = \frac{3-n(2n-3)}{2^{n+1}}$.

当 $n \geq 3$ 时, $3-n(2n-3) < 0$, 得 $b_{n+1} - b_n < 0$, 即 $b_{n+1} < b_n$.

又因为 $b_1 = \frac{3}{2}, b_2 = \frac{5}{2}, b_3 = \frac{21}{8}$, 所以

$b_1 < b_2 < b_3$,

所以 $\{b_n\}$ 的最大项是 $b_3 = \frac{21}{8}$.

13. (1) 【解】因为 $a_{n+1} = a_n + 2^n$, 即 $a_{n+1} - a_n = 2^n$,

所以 $a_2 - a_1 = 2^1, a_3 - a_2 = 2^2, \dots, a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$, 将以上 $n-1$ 个等式累加,

得 $a_n - a_1 = 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} =$

$\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} = 2^n - 2 (n \geq 2)$,

又 $a_1 = 2$, 所以 $a_n = 2^n (n \geq 2)$, 当 $n=1$ 时, $a_1 = 2$ 也满足 $a_n = 2^n$, 所以 $a_n = 2^n$.

(2) (i) 【证明】因为 $2b_{n+1} = b_n + b_{n+2}$, 所以 $\{b_n\}$ 为等差数列.

设 $\{b_n\}$ 的公差为 d , 又 $b_1 = 3, b_3 = a_3 + 1 = 9$, 所以 $d = \frac{b_3 - b_1}{3-1} = 3$,

所以 $b_n = 3n$, 所以 $S_n = \frac{(3+3n)n}{2}$,

所以 $\frac{1}{S_n} = \frac{2}{(3+3n)n} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$,

所以 $T_n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{2}{3}$.

(ii) 【解】因为对任意 $n \in \mathbf{N}_+$, $b_n - 5 \leq \lambda a_n$ 恒成立, 即对任意 $n \in \mathbf{N}_+$, $3n - 5 \leq \lambda \cdot 2^n$ 恒成立, 所以对任意

$n \in \mathbf{N}_+$, $\lambda \geq \frac{3n-5}{2^n}$ 恒成立,

令 $c_n = \frac{3n-5}{2^n}$, 则 $c_{n+1} - c_n = \frac{3n-2}{2^{n+1}} - \frac{3n-5}{2^n} = \frac{3n-2-2(3n-5)}{2^{n+1}} = \frac{8-3n}{2^{n+1}}$,

所以当 $1 \leq n \leq 2$ 时, $c_{n+1} - c_n > 0$, 当 $n \geq 3$ 时, $c_{n+1} - c_n < 0$,

所以 $c_1 < c_2 < c_3 > c_4 > c_5 > \dots$,

所以 $(c_n)_{\max} = c_3 = \frac{1}{2}$, 所以 $\lambda \geq \frac{1}{2}$,

故实数 λ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

刷素养

14. 4.047 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

则 $\begin{cases} a_1 + d = 1, \\ a_1 + 3d = 9, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = -3, \\ d = 4, \end{cases}$ 所以

$a_n = 4n - 7$. 设 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 则

$\begin{cases} b_1 q = 2, \\ b_1 q^2 = 4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b_1 = 1, \\ q = 2, \end{cases}$ 所以 $b_n = 2^{n-1}$.

所以 $S_n = -3 \times 2^{n-1} + 1 \times 2^{n-2} + 5 \times 2^{n-3} + \dots + (4n-7) \times 1$, ①

所以 $\frac{1}{2}S_n = -3 \times 2^{n-2} + 1 \times 2^{n-3} + 5 \times 2^{n-4} + \dots + (4n-11) \times 2^0 + (4n-7) \times \frac{1}{2}$, ②

①-②, 得 $\frac{1}{2}S_n = -3 \times 2^{n-1} + 4 \times 2^{n-2} + 4 \times 2^{n-3} + \dots + 4 \times 2^0 - (4n-7) \times \frac{1}{2} = -3 \times 2^{n-1} +$

$4 \times (2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^0) - \frac{1}{2}(4n-7)$

$= -3 \times 2^{n-1} + 4 \times \frac{1-2^{n-1}}{1-2} - \frac{1}{2}(4n-7)$

$= -3 \times 2^{n-1} + 4 \times 2^{n-1} - 4 - \frac{1}{2}(4n-7)$

$= 2^{n-1} - 2n - \frac{1}{2}$,

所以 $S_n = 2^n - 4n - 1$,

所以 $S_{12} = 2^{12} - 4 \times 12 - 1 = 4\,047$.

第 5.3 节综合训练

刷能力

1. A 【解析】因为 $S_{n+1} = 3S_n$, 所以数列 $\{S_n\}$ 是以 S_1 为首项, 3 为公比的等比数列,

又 $S_2 = 9$, 所以 $S_n = S_2 \times 3^{n-2} = 9 \times 3^{n-2} = 3^n$,

所以 $S_{20} = 3^{20}, S_{19} = 3^{19}$,

所以 $a_{20} = S_{20} - S_{19} = 3^{20} - 3^{19} = 2 \times 3^{19}$. 故选 A.

2. A 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$. 由 S_3, S_9, S_6 依次成等差数列, 可得 $2S_9 = S_3 + S_6$,

当 $q=1$ 时, $S_9 = 9a_1, S_3 = 3a_1, S_6 = 6a_1$, 不满足 $2S_9 = S_3 + S_6$, 故 $q \neq 1$,

$\therefore \frac{2a_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} + \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$,

$\therefore a_1 \neq 0, q \neq 0, \therefore 2q^6 - q^3 - 1 = 0$, 解得

$q^3 = \frac{1}{2}$ 或 $q^3 = 1$ (舍).

当 $q^3 = -\frac{1}{2}$ 时, $2a_8 = 2a_1 q^7 = 2a_1 q \times$

$(q^3)^2 = \frac{1}{2}a_1 q, a_2 + a_5 = a_1 q(1 + q^3) =$

$\frac{1}{2}a_1 q, \therefore 2a_8 = a_2 + a_5$, 即 a_2, a_8, a_5 依次成等差数列, 故充分性成立.

由 a_2, a_8, a_5 依次成等差数列可得 $2a_8 = a_2 + a_5$, 即 $2a_1 q^7 = a_1 q + a_1 q^4$,

由 $a_1 q \neq 0$ 得 $2q^6 - q^3 - 1 = 0$, 解得 $q^3 = 1$

或 $q^3 = -\frac{1}{2}$, 故 $q=1$ 或 $q=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$.

当 $q=1$ 时, $S_9 = 9a_1, S_3 = 3a_1, S_6 = 6a_1$, 不满足 $2S_9 = S_3 + S_6$, 故必要性不成立.

综上可得, “ S_3, S_9, S_6 依次成等差数列

列”是“ a_2, a_8, a_5 依次成等差数列”的充分不必要条件. 故选 A.

3. C 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为

$$q (q \neq 0), \text{ 则 } a_1 a_5 = \frac{a_2 a_6}{q^2}, a_3 a_5 = a_2 a_6,$$

$$a_2 a_8 = a_2 a_6 q^2.$$

$$\therefore a_1 a_5 + 2a_3 a_5 + a_2 a_8 = 36, a_2 a_6 = 8,$$

$$\therefore \frac{8}{q^2} + 16 + 8q^2 = 36, \text{ 解得 } q = \pm\sqrt{2} \text{ 或 } \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\therefore$ 等比数列 $\{a_n\}$ 是递减数列,

$$a_n > 0, \therefore q = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore a_2 a_6 = 8, \therefore a_1^2 q^6 = 8. \text{ 又 } a_n > 0, \therefore a_1 = 8,$$

$$\therefore a_n = a_1 q^{n-1} = 8 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = 2^3 \times$$

$$\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{n-1} = 2^{\frac{7-n}{2}}, \therefore b_n = \log_2 a_n = \frac{7-n}{2},$$

$$\therefore |b_n| = \left|\frac{7-n}{2}\right| = \begin{cases} \frac{7-n}{2}, & 1 \leq n \leq 7, n \in \mathbf{N}, \\ \frac{n-7}{2}, & n \geq 8, n \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

$$\therefore T_{12} = \frac{6+5+4+3+2+1+0}{2} + \frac{1+2+3+4+5}{2} =$$

18. 故选 C.

4. B 【解析】设等边三角形的边长为 a ,

$$\text{则面积为 } S = \frac{1}{2} a \cdot a \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2,$$

点悟: 三角形面积公式 $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ (其中 a, b 是两边长, C 是夹角)

$$\frac{1}{2} ab \sin C \text{ (其中 } a, b \text{ 是两边长, } C \text{ 是夹角)}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}.$$

每次取各边中点作新三角形, 新三角形为等边三角形, 边长为原三角形边长的 $\frac{1}{2}$, 则面积为原三角形面积的 $\frac{1}{4}$,

所以所有这些三角形的面积构成的数列 $\{S_n\}$ 是首项为 $\sqrt{3}$, 公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列.

设所有这些三角形的面积之和为 T_n ,

$$\text{则 } T_n = \frac{\sqrt{3} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right].$$

因为 $0 < \frac{1}{4} < 1$, 所以当 $n \rightarrow +\infty$ 时,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n \rightarrow 0, \text{ 则 } 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \rightarrow 1,$$

所以所有这些三角形的面积之和将趋近于 $\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$. 故选 B.

5. A 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$,

$$\text{因为 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1, |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| = 2,$$

$$\text{所以 } a_1(1+q+q^2+q^3) = 1 \text{ 且 } |a_1|(1+|q|+|q|^2+|q|^3) = 2,$$

当 $q > 0$ 时, $|a_1|(1+q+q^2+q^3) = 2$, 可得 $\frac{|a_1|}{a_1} = 2$, 显然不成立.

当 $q < 0$ 时, 由 $a_1(1+q+q^2+q^3) = a_1(1+q)(1+q^2) = 1$,

$$|a_1|(1+|q|+|q|^2+|q|^3) = |a_1|(1-q+q^2-q^3) = |a_1|(1-q)(1+q^2) = 2,$$

两式相除, 可得

$$\frac{a_1(1+q+q^2+q^3)}{|a_1|(1+|q|+|q|^2+|q|^3)} = \frac{a_1(1+q)(1+q^2)}{|a_1|(1-q)(1+q^2)} = \frac{a_1(1+q)}{|a_1|(1-q)} = \frac{1}{2},$$

若 $a_1 > 0$, 则 $\frac{1+q}{1-q} = \frac{1}{2}$, 解得 $q = -\frac{1}{3}$, 此时 $a_1 = \frac{27}{20}$;

若 $a_1 < 0$, 则 $\frac{1+q}{1-q} = -\frac{1}{2}$, 解得 $q = -3$, 此时 $a_1 = -\frac{1}{20}$. 故选 A.

6. D 【解析】由题意得, 投入生产的启动资金共有 $50 \times 4 = 200$ 万元,

$$a_1 = 200(1+50\%) - 60 = 200 \times \frac{3}{2} - 60 = 240,$$

$$a_2 = a_1(1+50\%) - 60 = \frac{3}{2}a_1 - 60 = 300,$$

……

$$a_{n+1} = a_n(1+50\%) - 60 = \frac{3}{2}a_n - 60.$$

$$\text{则当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = \frac{3}{2}a_{n-1} - 60 = \frac{3}{2} \cdot$$

$$\left(\frac{3}{2}a_{n-2} - 60\right) - 60$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 a_{n-2} - \frac{3}{2} \times 60 - 60 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 a_{n-3} -$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 60 - \frac{3}{2} \times 60 - 60$$

$$= \dots = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} a_1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \times 60 -$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-3} \times 60 - \dots - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 60 - \frac{3}{2} \times$$

$$60 - 60$$

$$= 240 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 60 \left[1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \dots +$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\right]$$

$$= 240 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 60 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{2}} =$$

$$240 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 120 \left[1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right] =$$

$$120 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 120 (n \geq 2),$$

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 240$ 也满足该式, 故

$$a_n = 120 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 120.$$

点悟: 也可将 $a_n = \frac{3}{2}a_{n-1} - 60$ 变形为

$$a_n - 120 = \frac{3}{2}(a_{n-1} - 120), \text{ 构造等比数列求 } a_n$$

令 $120 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 120 \geq 1200$, 所以

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \geq 9,$$

因为 $1.5^5 \approx 7.59, 1.5^6 \approx 11.39$, 所以 $n-1 \geq 6$, 即 $n \geq 7$.

所以至少经过 7 年, 公司分红后的剩余资金不低于 1200 万元. 故选 D.

7. BD 【解析】选项 A, $\because S_n = 2a_n - 1$,

$$\therefore \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = S_1 = 2a_1 - 1, \text{ 解得 } a_1 = 1,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = (2a_n - 1) - (2a_{n-1} - 1) = 2a_n - 2a_{n-1},$$

$$\text{即 } a_n = 2a_n - 2a_{n-1}, \text{ 则 } a_n = 2a_{n-1},$$

则 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比为 $q=2$, 首项为 $a_1=1$, 故 $a_n = a_1 q^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$,

则 $a_5 = 2^4 = 16 \neq 32$, 故选项 A 错误;

选项 B, $\because b_n = \log_2 a_{n+1}, a_n = 2^{n-1}, \therefore b_n = \log_2 2^n = n$, 故选项 B 正确;

选项 C, $\because a_n = 2^{n-1}, \therefore a_n^2 = (2^{n-1})^2 = 2^{2(n-1)} = 4^{n-1}$,

$$\therefore a_{n-1}^2 = 4^{n-2} (n \geq 2), \therefore \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} = \frac{4^{n-1}}{4^{n-2}} = 4$$

($n \geq 2$),

$\therefore \{a_n^2\}$ 是等比数列, 首项为 $a_1^2 = 1$, 公比为 4,

$$\therefore a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = \frac{1 \times (1-4^n)}{1-4} =$$

$$\frac{4^n - 1}{3}, \text{ 故选项 C 错误;}$$

$$\text{选项 D, } \because b_n = n, \therefore \frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\therefore \frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \dots + \frac{1}{b_{99} b_{100}} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) +$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} -$$

$$\frac{1}{100}\right) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}, \text{ 故选项 D 正确. 故}$$

选 BD.

8. BD 【解析】对于 A, 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$, 由 $a_{n+1} = S_n + 2$, 得

$$a_n = S_{n-1} + 2 (n \geq 2),$$

两式相减得 $a_{n+1} - a_n = S_n - S_{n-1} = a_n$, 即 $a_{n+1} = 2a_n$, 所以 $q=2$,

因为 $\{a_n\}$ 为等比数列, 所以 $a_2 = 2a_1$, 又 $a_2 = S_1 + 2 = a_1 + 2$, 所以 $a_1 = 2$,

所以 $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$, A 错误;

对于 B, 设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d , 由 $b_2 = a_1 = 2, b_8 = a_3 = 8$,

得 $6d = b_8 - b_2 = 6$, 解得 $d=1$, 所以 $b_n = b_2 + (n-2)d = n$, B 正确;

对于 C, 由 $A = \{x \in \mathbf{N}_+ | b_n \leq x \leq a_n\}$, 得 $A = \{x \in \mathbf{N}_+ | n \leq x \leq 2^n\}$,

则集合 A 中元素的个数为 $2^n - n + 1$, 即 $c_n = 2^n - n + 1$, C 错误;

对于 D, $T_n = (2 + 2^2 + \dots + 2^n) - (1 + 2 + \dots + n) + n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} - \frac{n(n+1)}{2} + n =$

$$2^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2} - 2, \text{ D 正确. 故选 BD.}$$

9. $2^{n+1} + n^2 - 2$ 【解析】由 $a_1 = 1, a_2 = 2$,

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_n + 2, & n = 2k-1, \\ 2a_n, & n = 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbf{N}_+),$$

可得数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列; 偶数项是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列.

$\therefore$ 对任意正整数 $k, a_{2k-1} = 1 + 2(k-1) = 2k-1, a_{2k} = 2^k$.

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n =$

$$\begin{cases} n, & n = 2k-1, \\ 2^{\frac{n}{2}}, & n = 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbf{N}_+.$$

$$\begin{aligned} \text{则 } S_{2n} &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}) \\ &= \frac{n(1+2n-1)}{2} + \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} + n^2 - 2. \end{aligned}$$

10. $-\frac{73}{512}$ 【解析】设 $\frac{n^2}{2^n} =$

$$\frac{a(n-1)^2 + b(n-1) + c}{2^{n-1}} - \frac{an^2 + bn + c}{2^n} = \frac{an^2 + (b-4a)n + 2a-2b+c}{2^n},$$

【悟】知道目标形式但不知道具体系数时, 可以通过待定系数法求出系数

$$\begin{cases} a=1, \\ b-4a=0, \\ 2a-2b+c=0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a=1, \\ b=4, \\ c=6, \end{cases}$$

$$\text{则 } \frac{n^2}{2^n} = \frac{(n-1)^2 + 4(n-1) + 6}{2^{n-1}} - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n},$$

$$\begin{aligned} \text{则数列 } \left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\} \text{ 的前 } n \text{ 项和 } T_n &= \left(\frac{6}{2^0} - \frac{1^2 + 4 + 6}{2^1} \right) + \left(\frac{1^2 + 4 + 6}{2^1} - \frac{2^2 + 4 \times 2 + 6}{2^2} \right) + \left(\frac{2^2 + 4 \times 2 + 6}{2^2} - \frac{3^2 + 4 \times 3 + 6}{2^3} \right) + \cdots + \left[\frac{(n-1)^2 + 4(n-1) + 6}{2^{n-1}} - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n} \right] = 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}, \end{aligned}$$

$$\text{则 } T_{10} - 6 = -\frac{10^2 + 4 \times 10 + 6}{2^{10}} = -\frac{146}{2^{10}} =$$

$$-\frac{73}{2^9} = -\frac{73}{512}.$$

11. 【解】(1) 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$;

当 $n=1$ 时, $a_1 = 1 = 2 \times 1 - 1$, 满足上式, 所以 $a_n = 2n-1$.

由 $b_{n+1} = 2b_n + 1$ 得, $b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$, 又 $b_1 + 1 = 2 \neq 0$, 所以数列 $\{b_n + 1\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $b_n + 1 = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$, 所以 $b_n = 2^n - 1$.

(2) 当 n 为偶数时, $T_n = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n = 2 \times 1 - 1 + 2^2 - 1 + 2 \times 3 - 1 + 2^4 - 1 + \cdots +$

$$\begin{aligned} & 2(n-1) - 1 + 2^n - 1 \\ &= [2 \times 1 + 2 \times 3 + \cdots + 2(n-1)] + (2^2 + 2^4 + \cdots + 2^n) - n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{n}{2}(2+2n-2)}{2} + \frac{2^2[1-(2^2)^{\frac{n}{2}}]}{1-2^2} - n \\ &= \frac{n^2}{2} + \frac{2^{n+2}-4}{3} - n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } n \text{ 为奇数时, } T_n &= c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n = 2 \times 1 - 1 + 2^2 - 1 + 2 \times 3 - 1 + 2^4 - 1 + \cdots + 2^{n-1} - 1 + 2 \times n - 1 \\ &= (2 \times 1 + 2 \times 3 + \cdots + 2n) + (2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{n-1}) - n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right) (2+2n) + \frac{2^2[1-(2^2)^{\frac{n-1}{2}}]}{1-2^2} - n \\ &= \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{2^{n+1}-4}{3} - n = \frac{n^2}{2} + \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } T_n = \begin{cases} \frac{n^2}{2} + \frac{2^{n+2}-4}{3} - n, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{n^2}{2} + \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{5}{6}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

12. 【解】(1) 因为不超过正整数 6 且与 6 互素的正整数只有 1, 5, 所以 $\varphi(6) = 2$.

因为不超过正整数 10 且与 10 互素的正整数只有 1, 3, 7, 9, 所以 $\varphi(10) = 4$.

正偶数与 2^n 不互素, 所有正奇数与 2^n 互素, 比 2^n 小的正奇数有 2^{n-1} 个, 所以 $\varphi(2^n) = 2^{n-1}$.

(2) 所有不超过正整数 3^n 的正整数有 3^n 个, 其中与 3^n 不互素的正整数有 $1 \times 3, 2 \times 3, 3 \times 3, \dots, 3^{n-1} \times 3$, 共 3^{n-1} 个, 所以所有不超过正整数 3^n 且与 3^n 互素的正整数的个数为 $3^n - 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$, 即 $\varphi(3^n) = 2 \times 3^{n-1}$.

$$\text{则 } a_n = \frac{1}{2} n \cdot \varphi(3^n) = n \cdot 3^{n-1},$$

$$\text{则 } S_n = 1 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + 3 \times 3^2 + \cdots + (n-1) \cdot 3^{n-2} + n \cdot 3^{n-1},$$

$$3S_n = 1 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \cdots + (n-1) \cdot 3^{n-1} + n \cdot 3^n,$$

$$\text{两式相减得 } -2S_n = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1} - n \cdot 3^n = \frac{1}{2}(3^n - 1) - n \cdot 3^n, \text{ 则}$$

$$S_n = \frac{1}{4}(2n-1)3^n + \frac{1}{4}.$$

$$(3) \text{ 由 } (2) \text{ 可知 } \frac{4S_n-1}{2n-1} = \frac{(2n-1)3^n+1-1}{2n-1} = 3^n, \text{ 则 } T_n =$$

$$\frac{3(1-3^n)}{1-3} = \frac{3}{2} \times 3^n - \frac{3}{2}.$$

$$\text{由 } \lambda \cdot \left(T_n + \frac{3}{2} \right) - 2n + 3 \geq 0 \text{ 得 } \lambda \geq \frac{2}{3} \times \frac{2n-3}{3^n} \text{ 恒成立, 令 } b_n = \frac{2}{3} \times \frac{2n-3}{3^n},$$

【悟】利用参数分离法, 将不等式恒成立问题转化为求最值问题

$$\text{则 } b_{n+1} - b_n = \frac{2}{3} \times \frac{2n-1}{3^{n+1}} - \frac{2}{3} \times \frac{2n-3}{3^n} =$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{-4n+8}{3^{n+1}}, \text{ 可得 } b_2 > b_1; \text{ 当 } n > 2 \text{ 时,}$$

$$b_{n+1} < b_n, \text{ 当 } n=2 \text{ 时, } b_{n+1} = b_n,$$

$$\text{所以 } b_n = \frac{2}{3} \times \frac{2n-3}{3^n} \text{ 的最大值为 } b_2 =$$

$$b_3 = \frac{2}{27}, \text{ 故 } \lambda \geq \frac{2}{27}. \text{ 故实数 } \lambda \text{ 的取值}$$

$$\text{范围为 } \left[\frac{2}{27}, +\infty \right).$$

刷素养

13. ABD 【解析】由题可知 $2a_n - 3 \neq 0$,

$$\text{则 } a_{n+1} = \frac{-1}{2a_n - 3}, \text{ 利用不动点方法令}$$

$$a_{n+1} = a_n = x, \text{ 可得 } x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, \text{ 于是}$$

$$\text{可求得 } \frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{a_n-1}{a_n-\frac{1}{2}}, \text{ 所以}$$

$$\left\{ \frac{a_n-1}{a_n-\frac{1}{2}} \right\} \text{ 是以 } \frac{a_1-1}{a_1-\frac{1}{2}} = 4 \text{ 为首项, 2 为}$$

$$\text{公比的等比数列, 则 } \frac{a_n-1}{a_n-\frac{1}{2}} = 2^{n+1}, \text{ 则}$$

$$a_n = \frac{2^n-1}{2^{n+1}-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}-1}, \text{ 故}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}, \text{ 且 } \{a_n\} \text{ 为单调递增数列,}$$

$$\text{所以 } na_1 < S_n < na_n \quad (n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+), \text{ 则}$$

$$\frac{n}{3} < S_n < \frac{n}{2}, \text{ 又 } \frac{n}{3} > \frac{n-1}{6} \quad (n \geq 2, n \in$$

$$\mathbf{N}_+), \text{ 所以 } S_n > \frac{n-1}{6}, \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } \frac{n-1}{6} <$$

$$S_n < \frac{n}{2}, \text{ 则 } \frac{n-1}{6} < S_n < \frac{n}{2} \quad (n \in \mathbf{N}_+), \text{ 故}$$

$$\text{A, B, D 正确. 在数列 } \left\{ \frac{a_n-1}{a_n+\frac{1}{2}} \right\} \text{ 中,}$$

$$\frac{a_1-1}{a_1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \frac{a_2-1}{a_2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}, \frac{a_3-1}{a_3+\frac{1}{2}} = \frac{4}{11},$$

不是等比数列, 故 C 错误. 故选 ABD.

5.4 数列的应用

刷基础

1. B 【解析】首付 11 万元, 余款 14 万元, 由题意可知是分 7 次还清,

设第 n 次还款的金额为 a_n , 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,

$$\text{则 } a_1 = 2 + 14 \times 10\% = 3.4 \text{ (万元)},$$

$$a_2 = 2 + (14-2) \times 10\% = 3.2 \text{ (万元)},$$

$$a_3 = 2 + (14-2 \times 2) \times 10\% = 3 \text{ (万元)}, \dots,$$

$$a_n = 2 + [14 - 2(n-1)] \times 10\% = [3.4 - 0.2(n-1)] \text{ (万元)}, \text{ 则数列 } \{a_n\} \text{ 是首项为 } 3.4, \text{ 公差为 } -0.2 \text{ 的}$$

$$\text{等差数列, 则 } S_7 = 7 \times 3.4 + \frac{7 \times 6}{2} \times$$

$(-0.2) = 19.6 \text{ (万元)}, \text{ 因此购买这辆车小明最后实际共花 } 11 + 19.6 = 30.6 \text{ (万元)}. \text{ 故选 B.}$

2. C 【解析】设树干上的截面圆的半径为 r , 则树干周长 $2\pi r = 3.14$, 解得 $r \approx 0.5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$. 设年轮宽度从内向外构成等差数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n ,

$$a_5 = 0.4, a_{n-4} = 0.2, S_n = r = 50 = \frac{(a_5 + a_{n-4}) \cdot n}{2} = 0.3n, \text{ 所以 } n = \frac{500}{3} \approx$$

167 年, 所以该大树为三级古树. 故选 C.

3. C 【解析】细胞分裂后细胞个数是一个以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 则一个细胞经过五次分裂后的细胞个数为 $2 \times 2^{5-1} = 32$. 故选 C.

4. B 【解析】由题意, 2018 年存入的 5 万元共存了 10 年, 本息和为 $5 \times (1+0.025)^{10}$ 万元, 2019 年存入的 5 万元共存了 9 年, 本息和为 $5 \times (1+0.025)^9$ 万元, ……

$$2027 \text{ 年存入的 } 5 \text{ 万元共存了 } 1 \text{ 年, 本息和为 } 5 \times (1+0.025) \text{ 万元, 所以到 } 2028 \text{ 年 } 1 \text{ 月 } 1 \text{ 日将之前所有存款及利息全部取回, 他可取回的钱数为 } 5 \times (1+0.025)^{10} + 5 \times (1+0.025)^9 + \cdots + 5 \times (1+0.025) = 5 \times \frac{1.025 \times (1.025^{10} - 1)}{1.025 - 1} \approx 5 \times \frac{1.025 \times (1.28 - 1)}{0.025} = 57.4 \approx 57 \text{ (万元)},$$

故选 B.

5. $\frac{ar(1+r)^{11}}{(1+r)^{11}-1}$ 【解析】设每月还款 x 元, 按复利计算, 则 $x[1 + (1+r) + (1+r)^2 + \cdots + (1+r)^{10}] = a(1+r)^{11}$, 即 $\frac{1 \times [1 - (1+r)^{11}]}{1 - (1+r)} x = a(1+r)^{11}$, 解得 $x = \frac{ar(1+r)^{11}}{(1+r)^{11} - 1}$.

6. C 【解析】由题意知这五年投入的资金构成首项为 81, 公比为 $\frac{4}{3}$, 项数为 5 的等比数列, 所以这五年投入的资金总额是 $\frac{81 \times [1 - (\frac{4}{3})^5]}{1 - \frac{4}{3}} = 781$ (万元).

由题意知这五年的旅游收入构成首项为 20, 公差为 10, 项数为 5 的等差数列, 所以这五年的旅游收入总额是 $20 \times 5 + \frac{5 \times 4}{2} \times 10 = 200$ (万元). 故选 C.

7. B 【解析】设第 n 个月的产量和合格率分别构成数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 不妨设 $a_1 = 1$, 则第 1 个月的销量为 $1 \times 90\% = 0.9$, 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 1.1 的等比数列, 故 $a_n = 1 \times 1.1^{n-1} = 1.1^{n-1}$. 数列 $\{b_n\}$ 的前 9 项构成以 0.9 为首项, 公差为 0.01 的等差数列, 故当 $1 \leq n \leq 9$ 时, $b_n = 0.9 + 0.01 \times (n-1) = 0.01n + 0.89$, 由题意可知当 $n \geq 10$ 时, $b_n = b_9 = 0.98$, 则该公司第 n 个月的销量为 $a_n b_n$, 当 $1 \leq n \leq 9$ 时, $a_n b_n = (0.01n + 0.89) \times 1.1^{n-1}$, 当 $1 \leq n \leq 8$ 时, $a_{n+1} > a_n > 0$, $b_{n+1} > b_n > 0$, 则 $a_n b_n < a_{n+1} b_{n+1}$,

故数列 $\{a_n b_n\}$ ($1 \leq n \leq 9$) 为递增数列, 且 $a_1 b_1 = 0.9$,

$$\text{因为 } a_7 b_7 = 0.96 \times 1.1^6 < 0.96 \times 1.8 = 1.728 < 1.8, a_8 b_8 = 0.97 \times 1.1^7 > 0.97 \times 1.9 = 1.843 > 1.8,$$

当 $10 \leq n \leq 12$ 时, $a_n b_n = 0.98 \times 1.1^{n-1}$, 此时数列 $\{a_n b_n\}$ ($10 \leq n \leq 12$) 单调递增, 此时 $a_n b_n > a_9 b_9 > a_8 b_8 > 1.8$, 则 $n = 8$ 时满足题意. 故选 B.

刷能力

1. C 【解析】由 $a_n = 2a_{n-1} - 1 = 2(2a_{n-2} - 1) - 1 = \cdots = 2^{n-1} \times 2a_0 - (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) = 2^{n+1} - 2^n + 1$, 得 $a_6 = 2^7 - 2^6 + 1 = 65$. 故选 C.

2. C 【解析】设哈雷彗星从 1606 年以后第 n 次回到近日点的年份为数列 $\{a_n\}$, 则 $a_n = 1606 + 76n$, 设奥伯斯彗星从 1606 年以后第 n 次回到近日点的年份为数列 $\{b_n\}$, 则 $b_n = 1606 + 70n$, 则数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项构成以 1606 为首项, 70 与 76 的最小公倍数为公差的等差数列, 又 70 与 76 的最小公倍数为 2660, 设哈雷彗星与奥伯斯彗星从 1606 年以后, 第 n 次同年回到近日点的年份为数列 $\{c_n\}$, 则 $c_n = 1606 + 2660n$. 令 $n = 1$, 则 $c_1 = 4266$. 故选 C.

3. A 【解析】学生甲从 6 月初到 9 月初已经还了 4 个月, 则 10 月初的还款额为 $\frac{5000}{12} + \left(5000 - \frac{5000}{12} \times 4\right) \times 0.4\% = 430$ 元, 设学生乙每个月的还款额均为 x 元, 则 $x[1 + (1+0.4\%) + (1+0.4\%)^2 + \cdots + (1+0.4\%)^{11}] = 5000(1+0.4\%)^{12}$, 即 $\frac{1 \times [1 - (1+0.4\%)^{12}]}{1 - (1+0.4\%)} x = 5000(1 + 0.4\%)^{12}$, 故 $x = \frac{5000 \times 0.4\% (1+0.4\%)^{12}}{(1+0.4\%)^{12} - 1} \approx 428.16$ 元,

则学生乙每个月的还款额均为 428.16 元, 则 2025 年 10 月初甲比乙将多还 $430 - 428.16 = 1.84 \approx 2$ 元. 故选 A.

4. ACD 【解析】根据题意, 经过 1 年之后, 该项目的资金为 $a_1 = 2000(1 + 20\%) - 200 = 2200$ 万元, **A 正确**; $a_{n+1} = a_n \times (1 + 20\%) - 200 = 1.2a_n - 200$, **B 不正确**; $\therefore a_{n+1} = 1.2a_n - 200$, 则 $a_{n+1} - 1000 = 1.2(a_n - 1000)$, $\therefore$ 数列 $\{a_n - 1000\}$ 是首项为 1200, 公比为 1.2 的等比数列, **C 正确**; $a_n - 1000 = 1200 \times 1.2^{n-1} = 1000 \times 1.2^n$, 即 $a_n = 1000(1.2^n + 1)$, 令 $a_n = 1000(1.2^n + 1) \geq 4000$, 则 $n \geq \frac{\lg 3}{2 \lg 2 + \lg 3 - 1} \approx 6$,

因此至少要经过 6 年, 该项目的资金才可以达到或超过翻一番 (即为原来的 2 倍) 的目标, **D 正确**. 故选 ACD.

5. 200 6 【解析】设甲方第 n ($n \in \mathbf{N}_+$) 轮报价为 a_n 万元, 乙方第 n ($n \in \mathbf{N}_+$)

轮报价为 b_n 万元, 则 $a_1 = 100$, $b_1 = 300$,

当 $n \geq 2$ 时, 由题意可

$$\text{得 } \begin{cases} a_n = \frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3}b_{n-1}, \\ b_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{3}b_{n-1}, \end{cases}$$

上述两个等式相加得 $a_n + b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$, 即数列 $\{a_n + b_n\}$ 是常数列,

故 $a_n + b_n = a_1 + b_1 = 400$, 即 $a_n + b_n = 400$ ①,

$$\text{由上可得 } a_n - b_n = \frac{1}{3}(a_{n-1} - b_{n-1}), \text{ 且}$$

$$a_1 - b_1 = -200,$$

即数列 $\{a_n - b_n\}$ 是首项为 -200, 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列,

$$\text{所以 } a_n - b_n = -200 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ ②,}$$

$$\text{由 ① ② 可得 } a_n = 200 - \frac{100}{3^{n-1}}, b_n = 200 + \frac{100}{3^{n-1}},$$

由 $|a_n - b_n| = \frac{200}{3^{n-1}} \leq 1$ 可得 $3^{n-1} \geq 200$, 由于 $n \in \mathbf{N}_+$, 且 $3^4 < 200 < 3^5$, 则 $n-1 \geq 5$, 即 $n \geq 6$.

故 n 的最小值为 6, 且 $a_6 = 200 - \frac{100}{3^5} \approx$

$$200, b_6 = 200 + \frac{100}{3^5} \approx 200,$$

因此成交价为 200 万元, 共经过了 6 轮报价.

6. 【解】(1) 设甲超市前 n 年总销售额为 S_n 万元, 第 n 年销售额为 a_n 万元,

$$\text{则 } S_n = \frac{a}{2}(n^2 - n + 2),$$

当 $n = 1$ 时, $a_1 = a$,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{a}{2}(n^2 - n + 2) -$$

$$\frac{a}{2}[(n-1)^2 - (n-1) + 2] = a(n-1),$$

$$\text{故 } a_n = \begin{cases} a, & n=1, \\ a(n-1), & n \geq 2. \end{cases}$$

设乙超市第 n 年销售额为 b_n 万元, 则 $b_1 = a$,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n - b_{n-1} = a\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

$$\text{则 } b_n = (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \cdots +$$

$$(b_2 - b_1) + b_1 = \frac{2a}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right] + a = \frac{a}{3} \left[3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right],$$

显然 $n = 1$ 时也符合,

$$\text{所以 } b_n = a \left[3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right], n \in \mathbf{N}_+.$$

$$(2) \text{ 当 } n = 2 \text{ 时, } a_2 = a, b_2 = \frac{5}{3}a, \text{ 有 } a_2 >$$

$$\frac{1}{2}b_2;$$

$$\text{当 } n = 3 \text{ 时, } a_3 = 2a, b_3 = \frac{19}{9}a, \text{ 有 } a_3 > \frac{1}{2}b_3;$$

当 $n \geq 4$ 时, $a_n \geq 3a$, $b_n < 3a$, 故乙超市有可能被收购.

当 $n \geq 4$ 时, 令 $\frac{1}{2}a_n > b_n$, 则 $\frac{1}{2}a(n-1) > a \left[3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \right]$,

整理得 $n > 7 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$,

当 $4 \leq n \leq 6$ 时, 不等式不成立,

又当 $n \geq 7$ 时, $0 < 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} < 1$, 故当 $n \in$

$\mathbf{N}_+$ 且 $n \geq 7$ 时, 必有 $n > 7 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$,

即第 7 年乙超市的年销售额不足甲超市的年销售额的 50%, 故至少在第 7 年乙超市将被甲超市收购.

专题 1 通项公式的求法

刷难关

1. C 【解析】由题得 $a_{n+1} - a_n = 2n - 1$, 则 $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = (2n-3) + (2n-5) + \cdots + 3 + 1 + 1 = \frac{(n-1)[(2n-3)+1]}{2} + 1 = n^2 - 2n + 2 (n \geq 2)$, 所以 $a_7 = 7^2 - 2 \times 7 + 2 = 37$.

多种解法 由题知 $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 2n - 1$, 所以 $a_7 = (a_7 - a_6) + (a_6 - a_5) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 + 1 = 37$. 故选 C.

归纳总结 形如 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 型的递推数列 (其中 $f(n)$ 是关于 n 的函数) 可构造

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} = f(n-1), \\ a_{n-1} - a_{n-2} = f(n-2), \\ \dots \\ a_2 - a_1 = f(1), \end{cases}$$

将上述 $n-1$ 个式子两边分别相加, 可得 $a_n = f(n-1) + f(n-2) + \cdots + f(2) + f(1) + a_1 (n \geq 2)$.

- (1) 若 $f(n)$ 是关于 n 的一次函数, 累加后可转化为等差数列求和;
- (2) 若 $f(n)$ 是关于 n 的指数函数, 累加后可转化为等比数列求和;
- (3) 若 $f(n)$ 是关于 n 的二次函数, 累加后可分组求和;
- (4) 若 $f(n)$ 是关于 n 的分式函数, 累加后可裂项求和.

2. C 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 的首项为 2, 且 $a_{n+1} - a_n = 2^n$, 所以 $a_6 = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_6 - a_5) = 2 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^5 = 2 + \frac{2 \times (1-2^5)}{1-2} = 64$. 故选 C.

3. B 【解析】 $\because 3a_{n+1} = a_n \cdot 9^n, a_1 = 3$, $\therefore a_n \neq 0, \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} \times 9^n$, $\therefore a_5 = \frac{a_5}{a_4} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \frac{1}{3} \times 9^4 \times \frac{1}{3} \times 9^3 \times \frac{1}{3} \times 9^2 \times \frac{1}{3} \times 9^1 \times 3 = \left(\frac{1}{3} \right)^4 \times 9^{4+3+2+1} \times 3 = 3^{-4} \times (3^2)^{10} \times 3 = 3^{17}$. 故选 B.

4. A 【解析】因为正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 2$, 且 $n \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) = \frac{2}{S_{n+1}}$, 所以 $\frac{n}{S_n} = \frac{n+2}{S_{n+1}}$, 则 $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+2}{n}$, 所以 $\frac{S_2}{S_1} = \frac{3}{1}, \frac{S_3}{S_2} = \frac{4}{2}, \frac{S_4}{S_3} = \frac{5}{3}, \dots, \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+2}{n}$,

上述等式左、右两边分别相乘得 $\frac{S_{n+1}}{S_1} = \frac{3 \times 4 \times \cdots \times n \times (n+1)(n+2)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, 则 $S_{n+1} = \frac{S_1(n+1)(n+2)}{2} = (n+1)(n+2)$, 故当 $n \geq 2$ 且 $n \in \mathbf{N}_+$ 时, $S_n = n(n+1)$, 且当 $n=1$ 时, $S_1=2$ 满足 $S_n = n(n+1)$, 所以对任意的 $n \in \mathbf{N}_+$, $S_n = n(n+1)$, 故 $a_5 = S_5 - S_4 = 5 \times 6 - 4 \times 5 = 10$. 故选 A.

5. ACD 【解析】对于 A: 令 $n=1$, 得 $2a_1 = 1$, 则 $a_1 = \frac{1}{2}$, 故 A 正确; 对于 B: $S_n = 1 - a_n$, 当 $n \geq 2$ 时, 有 $S_{n-1} = 1 - a_{n-1}$, 两式相减, 得 $a_n = a_{n-1} - a_n, n \geq 2$, 整理得 $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}, n \geq 2$. 又 $a_1 = \frac{1}{2}$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列,

则有 $a_n = \frac{1}{2^n}$, 易知 $\{a_n\}$ 是递减数列, 故 B 错误;

对于 C: 由 B 可知, $a_n = \frac{1}{2^n}$, 故 C 正确;

对于 D: 将 $a_n = \frac{1}{2^n}$ 代入 $S_n = 1 - a_n$, 可得 $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

6. C 【解析】因为 $b_1 + 3b_2 + 7b_3 + \cdots + (2^n - 1)b_n = 2n$ ①, 所以当 $n=1$ 时, $b_1 = 2$; 当 $n \geq 2$ 时 $b_1 + 3b_2 + 7b_3 + \cdots + (2^{n-1} - 1)b_{n-1} = 2n - 2$ ②,

①-②得 $(2^n - 1)b_n = 2$, 所以 $b_n = \frac{2}{2^n - 1}$,

当 $n=1$ 时, $b_n = \frac{2}{2^n - 1}$ 也成立,

所以 $b_n = \frac{2}{2^n - 1}$, 所以 $b_5 = \frac{2}{31}$. 故选 C.

名师点拨 在处理同时包含 S_n 和 a_n 的条件时, 基本的思路是消一个留一个, 而具体消谁留谁取决于条件的关系中谁好消、消之后剩下的递推公式是否方便研究.

7. D 【解析】在数列 $\{a_n\}$ 中, 由 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2$, 得 $a_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(a_n - 3)$, 而 $a_1 - 3 = 1$, 因此数列 $\{a_n - 3\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列, $a_n - 3 = 1 \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$, 即 $a_n = 3 + \frac{1}{3^{n-1}}$, 所以 $a_{100} = \frac{3^{100} + 1}{3^{99}}$. 故选 D.

归纳总结 类型一: 形如 $a_{n+1} = pa_n + q$ ($p \neq 0, p \neq 1$ 且 $q \neq 0$) 型的递推式. 数列 $\{a_n\}$ 为线性递推数列, 其通项公式可通过待定系数法构造等比数列来求. 设 $a_{n+1} + \lambda = p(a_n + \lambda)$, 展开移项整理得 $a_{n+1} = pa_n + (p-1)\lambda$, 与题设 $a_{n+1} = pa_n + q$ 比较系数 (待定系数法) 得 $\lambda = \frac{q}{p-1} (p \neq 0, p \neq 1, q \neq 0) \Rightarrow a_{n+1} + \frac{q}{p-1} = p \left(a_n + \frac{q}{p-1} \right) \Rightarrow a_n + \frac{q}{p-1} = p \left(a_{n-1} + \frac{q}{p-1} \right) (n \geq 2)$, 即数列 $\left\{ a_n + \frac{q}{p-1} \right\}$ 构成以 $a_1 + \frac{q}{p-1}$ 为首项, p 为公比的等比数列.

类型二: 形如 $a_{n+1} = pa_n + f(n)$ ($p \neq 0, p \neq 1$) 型的递推式. (1) 当 $f(n)$ 为一次函数类型 (即等差数列) 时, 设 $a_n + An + B = p[a_{n-1} + A(n-1) + B]$, 通过待定系数法确定 A, B 的值, 转化成以 $a_1 + A + B$ 为首项, p 为公比的等比数列 $\{a_n + An + B\}$, 再利用等比数列的通项公式求出 $\{a_n + An + B\}$ 的通项公式, 整理可得 a_n . (2) 当 $f(n)$ 为指数函数类型 (即等比数列) 时, 设 $a_n + \lambda f(n) = p[a_{n-1} + \lambda f(n-1)]$, 通过待定系数法确定 λ 的值, 转化成以 $a_1 + \lambda f(1)$ 为首项, p 为公比的等比数列 $\{a_n + \lambda f(n)\}$, 再利用等比数列的通项公式求出 $\{a_n + \lambda f(n)\}$ 的通项公式, 整理可得 a_n .

8. BD 【解析】因为 $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{3a_n}{3+2a_n}$, 所以 $a_n \neq 0$, 所以 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3+2a_n}{3a_n} = \frac{1}{a_n} + \frac{2}{3}$, 又 $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{3}$, 所以 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 是以 $\frac{1}{3}$ 为首项, $\frac{2}{3}$ 为公差的等差数列, 则 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{3}(n-1) = \frac{2n-1}{3}$,

所以 $a_n = \frac{3}{2n-1}$, 所以 $a_2 = 1$, 所以 A, C 错误, B 正确;

易知 $a_n a_{n+1} = \frac{3}{2n-1} \cdot \frac{3}{2n+1} = \frac{9}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$, 所以 $S_n = \frac{9}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] = \frac{9}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$.